

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Nozioni preliminari sugli insiemi</b>	<b>5</b>
1.1 Premessa . . . . .	5
1.2 Rappresentazione degli insiemi . . . . .	6
1.3 Relazione di inclusione . . . . .	8
1.4 Insieme delle parti . . . . .	10
1.5 Operazioni tra insiemi . . . . .	10
1.5.1 Complementare . . . . .	10
1.5.2 Unione tra insiemi . . . . .	12
1.5.3 Intersezione . . . . .	13
1.5.4 Differenza . . . . .	15
1.6 Partizione di un insieme . . . . .	16
1.7 Prodotto cartesiano . . . . .	16
1.8 Esercizi . . . . .	18
<b>2 Insiemi numerici e funzioni</b>	<b>21</b>
2.1 Insiemi numerici . . . . .	21
2.2 Massimo e Minimo di un insieme . . . . .	25
2.3 Maggiorante e Minorante di un insieme . . . . .	26
2.4 Estremo superiore ed estremo inferiore . . . . .	27
2.5 Insiemi separati e contigui . . . . .	31
2.6 Valore assoluto . . . . .	31
2.7 Funzioni . . . . .	32
2.8 Grafico di una funzione . . . . .	33

2.9	Funzioni limitate e illimitate . . . . .	43
2.10	Operazioni con le funzioni . . . . .	45
2.11	Successioni . . . . .	46
2.12	La retta reale . . . . .	51
2.13	Intervalli di numeri reali . . . . .	52
2.14	Principio di induzione . . . . .	55
2.15	Elementi di calcolo combinatorio . . . . .	57
2.16	Il numero di Nepero . . . . .	59
2.17	Insiemi numerabili . . . . .	60
2.18	Esercizi . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Il piano cartesiano</b>	<b>65</b>
3.1	La retta . . . . .	68
3.2	Esercizi . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Funzioni elementari</b>	<b>75</b>
4.1	Funzioni monotone . . . . .	75
4.2	Funzioni concave e convesse . . . . .	79
4.3	Funzioni simmetriche . . . . .	82
4.4	Funzioni elementari . . . . .	85
4.4.1	Funzione potenza con esponente $n \in \mathbf{N}$ . . . . .	85
4.4.2	Funzione potenza con esponente $-n$ . . . . .	88
4.4.3	Funzione potenza con esponente $\frac{1}{n}$ . . . . .	90
4.4.4	Funzione valore assoluto . . . . .	92
4.4.5	Funzione parte intera . . . . .	92
4.4.6	Funzione esponenziale . . . . .	93
4.4.7	Funzione logaritmo di base $a$ . . . . .	95
4.5	Funzioni periodiche . . . . .	98
4.5.1	Funzioni trigonometriche . . . . .	99
4.5.2	Funzione seno e coseno . . . . .	102
4.5.3	Funzione tangente e cotangente . . . . .	105
4.6	Funzioni trigonometriche inverse . . . . .	108
4.6.1	Funzione arcoseno . . . . .	108

---

4.6.2	Funzione arcocoseno . . . . .	110
4.6.3	Funzione arcotangente . . . . .	111
4.6.4	Funzione arcocotangente . . . . .	112
4.7	Trasformazioni geometriche e grafici di funzioni . . . . .	114
4.8	Esercizi . . . . .	118
<b>5</b>	<b>Limiti di funzioni</b>	<b>121</b>
5.1	Elementi di topologia . . . . .	121
5.2	Definizione di Limite . . . . .	125
5.3	Teoremi sui limiti . . . . .	137
5.4	Operazioni sui limiti . . . . .	148
5.5	Limite destro e limite sinistro . . . . .	155
5.6	Limiti di successioni . . . . .	161
5.7	Il numero di Nepero . . . . .	167
5.8	Esercizi . . . . .	168
<b>6</b>	<b>Funzioni continue</b>	<b>171</b>
6.1	Limiti di polinomi . . . . .	172
6.2	Limiti di funzioni razionali . . . . .	172
6.3	Teoremi sulle funzioni continue . . . . .	175
6.4	Punti di discontinuità . . . . .	181
6.5	Limiti notevoli . . . . .	185
6.6	Asintoti . . . . .	189
6.7	Esercizi . . . . .	191
<b>7</b>	<b>Derivazione</b>	<b>195</b>
7.1	Concetto di derivata . . . . .	195
7.2	Significato geometrico della derivata . . . . .	198
7.3	Derivata destra e derivata sinistra . . . . .	199
7.4	Punti angolosi e cuspidali . . . . .	200
7.5	Derivate di ordine superiore al primo . . . . .	205
7.6	Regole di derivazione . . . . .	206
7.7	Derivate delle funzioni elementari . . . . .	209
7.8	Derivate di funzioni composte . . . . .	212

7.9	Esercizi . . . . .	213
7.9.1	Differenziale . . . . .	214
7.10	Applicazioni del calcolo differenziale . . . . .	216
7.10.1	Funzioni crescenti e decrescenti in un punto . . . . .	216
7.11	Minimi e massimi relativi di una funzione . . . . .	220
7.12	Alcuni teoremi sulle funzioni derivabili . . . . .	222
7.13	Funzioni convesse e concave derivabili . . . . .	230
7.14	Approssimazione di una funzione con un polinomio . . . . .	232
7.15	Teoremi di de l'Hôpital . . . . .	233
7.16	Minimo e massimo assoluti di una funzione . . . . .	236
7.17	Infiniti e infinitesimi . . . . .	237
7.18	Studio di funzioni . . . . .	240
7.19	Esercizi . . . . .	242
<b>8</b>	<b>Serie numeriche</b>	<b>249</b>
8.1	Definizioni e proprietà . . . . .	249
8.2	Operazioni con le serie . . . . .	253
8.3	Serie a termini non negativi . . . . .	254
8.4	Serie armonica . . . . .	255
8.5	Serie geometrica . . . . .	256
8.6	Serie a segni alterni . . . . .	257
8.7	Serie assolutamente convergenti . . . . .	259
8.8	Criteri di convergenza . . . . .	260
8.8.1	Criterio del confronto . . . . .	260
8.8.2	Teoremi sulla regolarità . . . . .	260
8.8.3	Criterio del rapporto sottoforma di disuguaglianza . . . . .	261
8.8.4	Criterio del rapporto sottoforma di limite . . . . .	261
8.8.5	Criterio della radice sottoforma di disuguaglianza . . . . .	262
8.8.6	Criterio della radice sottoforma di limite . . . . .	262
8.8.7	Criterio di Raabe . . . . .	263
8.8.8	Ordine di infinitesimo di una successione . . . . .	268
8.8.9	Criterio di convergenza con l'ordine di infinitesimo . . . . .	273
8.9	Cenni sulle serie di Taylor . . . . .	277

---

8.10	Proprietà commutativa delle serie numeriche . . . . .	278
8.11	Proprietà associativa delle serie numeriche . . . . .	279
8.12	Esercizi . . . . .	280
<b>9</b>	<b>Integrali Indefiniti</b>	<b>285</b>
9.1	Proprietà di linearità dell'integrale indefinito . . . . .	289
9.2	Integrali indefiniti notevoli immediati . . . . .	289
9.3	Integrali indefiniti quasi immediati . . . . .	290
9.4	Esercizi su integrali quasi immediati . . . . .	291
9.5	Integrazione indefinita di funzioni razionali intere o fratte . .	293
9.5.1	Integrale di un polinomio . . . . .	293
9.5.2	Integrale di un rapporto tra polinomi: casi particolari	293
9.6	Integrale indefinito delle funzioni razionali fratte . . . . .	300
9.7	Metodo di integrazione per parti . . . . .	304
9.7.1	Integrali notevoli . . . . .	305
9.7.2	Esercizi sull'integrazione per parti . . . . .	306
9.8	Integrazione per sostituzione . . . . .	311
9.9	Classificazione degli integrali per sostituzione . . . . .	312
9.9.1	Integrale del tipo . . . . .	312
9.9.2	Integrale del tipo . . . . .	313
9.9.3	Integrale del tipo . . . . .	314
9.9.4	Integrale del tipo . . . . .	315
9.9.5	Integrale del tipo . . . . .	316
9.9.6	Integrali del tipo . . . . .	318
9.9.7	Integrali di funzioni razionali di $\sin x$ e $\cos x$ . . . . .	319
9.10	Esercizi . . . . .	323
<b>10</b>	<b>Integrali Definiti</b>	<b>325</b>
10.1	Misura di un insieme . . . . .	325
10.1.1	Misura di un plurintervallo . . . . .	325
10.1.2	Misura di un insieme limitato secondo Peano-Jordan	327
10.1.3	Misura di un insieme non limitato secondo Peano- Jordan . . . . .	330

10.2	Funzioni integrabili secondo Riemann . . . . .	331
10.2.1	Somme di Riemann al variare di $D$ . . . . .	332
10.2.2	Interpretazione geometrica dell'integrale secondo Riemann . . . . .	335
10.2.3	Integrale di una funzione continua come limite . . . . .	339
10.2.4	Proprietà di linearità dell'integrale di una funzione esteso ad un intervallo $[a, b]$ . . . . .	340
10.2.5	Rettangoloide relativo ad una funzione . . . . .	340
10.2.6	Insieme normale relativo ad $f$ e $g : N_{f,g}$ . . . . .	342
10.2.7	Proprietà additiva degli integrali . . . . .	343
10.2.8	Altre proprietà dell'integrale esteso . . . . .	344
10.3	Integrale definito . . . . .	344
10.3.1	Proprietà dell'integrale definito . . . . .	344
10.3.2	Metodo di integrazione per parti di un integrale definito	347
10.3.3	Metodo di integrazione per sostituzione di un integrale definito . . . . .	347
10.4	Integrali generalizzati . . . . .	349
10.4.1	Criteri di integrabilità . . . . .	352
10.4.2	Integrale di una funzione continua (o generalmente continua) esteso ad un intervallo illimitato . . . . .	355
10.5	Esercizi . . . . .	360
<b>11</b>	<b>Algebra lineare</b>	<b>363</b>
11.1	Matrici . . . . .	363
11.1.1	Definizioni e proprietà . . . . .	363
11.1.2	Operazioni fra matrici . . . . .	366
11.1.3	Determinante . . . . .	369
11.1.4	Rango di una matrice . . . . .	372
11.2	Sistemi lineari . . . . .	373
11.2.1	Sistemi di $n$ equazioni in $n$ incognite . . . . .	374
11.2.2	Sistemi di $m$ equazioni in $n$ incognite . . . . .	375
11.3	Esercizi . . . . .	381

<b>Indice</b>	<b>411</b>
<b>Appendice A: Indice dei simboli</b>	<b>385</b>
<b>Appendice B: Funzioni trigonometriche</b>	<b>389</b>
<b>Appendice C: Derivate delle funzioni elementari</b>	<b>393</b>
<b>Appendice D: Integrali indefiniti immediati e quasi immediati</b>	<b>395</b>
<b>Indice analitico</b>	<b>399</b>