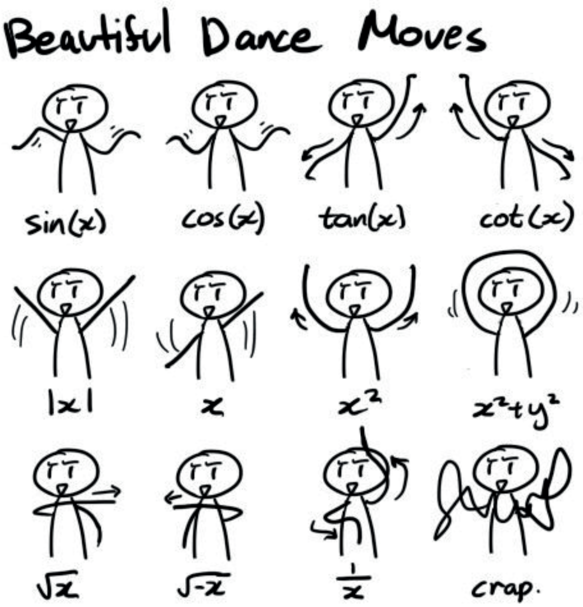
Francesco Brega - Grazia Messineo

Note di matematica

Esercizi e complementi



Giappichelli

Francesco Brega - Grazia Messineo

Note di matematica

Esercizi e complementi

Giappichelli

Capitolo 1

Algebra Lineare

1.1 *Spazi e sottospazi vettoriali, generatori, basi*

1.1.1 *Premessa*

I contenuti teorici di questo capitolo sono illustrati nel paragrafo 1.4 del libro *Note di Matematica* [2].

1.1.2 *Esercizi svolti*

Esercizio 1. Dimostrare quali dei seguenti sottoinsiemi (dove $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3$):

(a) $x_1 = 0$ oppure $x_2 = 0$;

(b) $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$;

(c) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$;

(d) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$;

sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione.

(a) I vettori appartenenti al sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ sono del tipo:

$$[0, x_2, x_3] \text{ oppure } [x_1, 0, x_3]$$

Non è un sottospazio non essendo chiuso rispetto alla somma.
Per dimostrarlo prendiamo 2 vettori appartenenti al sottoinsieme:

$$\mathbf{x} = [0,1,1]$$

$$\mathbf{y} = [1,0,1]$$

sommandoli si ottiene il vettore:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = [1,1,2]$$

che non appartiene al sottoinsieme avendo tutte le componenti diverse da 0.

(b) I vettori appartenenti al sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ sono del tipo:

$$[0,0,x_3]$$

È un sottospazio e per dimostrarlo procediamo come nel punto precedente prendendo 2 vettori appartenenti al sottoinsieme:

$$\mathbf{x} = [0,0,x_3]$$

$$\mathbf{y} = [0,0,y_3]$$

e 2 scalari $h,k \in \mathbb{R}$
Poiché una loro combinazione lineare:

$$h\mathbf{x} + k\mathbf{y} = [0,0,hx_3 + ky_3]$$

è ancora un vettore appartenente al sottoinsieme, avendo le prime 2 componenti nulle, il sottoinsieme è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

(c) È un sottospazio, prendiamo infatti 2 vettori appartenenti al sottoinsieme:

$$\mathbf{x} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\mathbf{y} \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

e 2 scalari $h,k \in \mathbb{R}$, una loro combinazione lineare:

$$\begin{aligned} h\mathbf{x} + k\mathbf{y} &= [hx_1 + ky_1, hx_2 + ky_2, hx_3 + ky_3] \\ &\Rightarrow hx_1 + ky_1 + hx_2 + ky_2 + hx_3 + ky_3 \\ &= h(x_1 + x_2 + x_3) + k(y_1 + y_2 + y_3) \\ &= h \cdot 0 + k \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

è ancora un vettore appartenente al sottoinsieme.

(d) Non è un sottospazio non essendo chiuso rispetto alla somma, prendiamo infatti 2 vettori appartenenti al sottoinsieme:

$$\mathbf{x} = [1,0,0]$$

$$\mathbf{y} = [0,1,0]$$

sommandoli ricaviamo il vettore:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = [1,1,0]$$

che non appartiene al sottoinsieme poiché la somma delle sue componenti risulta 2 e non 1.

Esercizio 2. Dati i vettori:

$$\mathbf{v} = [1,0,0], \quad \mathbf{w} = [2,0,1], \quad \mathbf{x} = [1,1,1]$$

mostrare che

(a) generano $\mathbb{R}^3$;

(b) $B = \{\mathbf{v},\mathbf{w}.\mathbf{x}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione.

(a) Bisogna mostrare che un qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^3$ può essere espresso come combinazione lineare di $\mathbf{v}$,$\mathbf{w}$ e $\mathbf{x}$.
Sia

$$\mathbf{y} = [y_1,y_2,y_3] \in \mathbb{R}^3$$

allora deve essere

$$\mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{v} + \alpha_2\mathbf{w} + \alpha_3\mathbf{x} \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R})$$

Devo poter determinare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ indipendentemente dalle componenti y_1, y_2, y_3 di $\mathbf{y}$:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Eguagliando le componenti:

$$\begin{cases} y_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ y_2 = \alpha_3 \\ y_3 = \alpha_2 + \alpha_3 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \alpha_1 = y_1 + y_2 - 2y_3 \\ \alpha_2 = y_3 - y_2 \\ \alpha_3 = y_2 \end{cases}$$

Ad esempio, prendiamo il vettore:

$$\mathbf{y} = [5, -3, 4]$$

dalle uguaglianze ottenute avremo:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 5 - 3 - 8 = -6 \\ \alpha_2 = 4 + 3 = 7 \\ \alpha_3 = -3 \end{cases}$$

e quindi:

$$\mathbf{y} = -6\mathbf{v} + 7\mathbf{w} - 3\mathbf{x}$$

(b) Affinché B sia una base di $\mathbb{R}^3$, i 3 vettori devono essere generatori (come già dimostrato nel punto (a)) e linearmente indipendenti.
Per dimostrare l'indipendenza lineare dei 3 vettori possiamo procedere in 2 modi, il primo mediante una loro combinazione lineare, il secondo calcolando il rango della matrice ottenuta allineandoli:

(a) Deve essere:

$$\alpha_1\mathbf{v} + \alpha_2\mathbf{w} + \alpha_3\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

quindi:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

i 3 vettori $\mathbf{v}$,$\mathbf{w}$ e $\mathbf{x}$ sono quindi linearmente indipendenti e. poiché sono generatori di $\mathbb{R}^3$, B è una base la cui dimensione è data dal numero di vettori che la compongono cioè 3.

(b) Allineando i 3 vettori otteniamo la matrice:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il rango della matrice è il numero dei vettori colonna linearmente indipendenti.
Affinché B sia una base, tutti i 3 vettori colonna devono essere linearmente indipendenti e quindi il rango della matrice deve essere 3, cioè il suo determinante deve essere diverso da 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = -1$$

B costituisce quindi una base di $\mathbb{R}^3$ e la sua dimensione è il rango della matrice:

$$\dim(B) = 3$$

Esercizio 3. Dato il vettore:

$$\mathbf{v} = [2, -1{,}0]$$

determinare base e dimensione del sottospazio V dei vettori ortogonali a $\mathbf{v}$.
Soluzione.
Ricordiamo che due vettori si dicono *ortogonali* se il loro prodotto scalare è nullo. Il sottospazio V si può quindi scrivere come:

$$V = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0 \right\}$$

Prendendo un generico vettore $\mathbf{x} = [x_1{,}x_2{,}x_3]$, avremo:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = [x_1{,}x_2{,}x_3] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2x_1$$

Avremo quindi:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = 2x_1 = 2\alpha_1 \\ x_3 = \alpha_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{x} = [\alpha_1{,}2\alpha_1{,}\alpha_2]$$

$$= \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha_1, \alpha 2 \in \mathbb{R}$$

I 2 vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

formano una possibile base per V per cui $\dim(V) = 2$.

Esercizio 4. Sia

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : 2kx_1 - 3kx_2 - k + 1 = 0, \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

Determinare per quali valori del parametro reale k, il sottoinsieme V è sottospazio vettoriale e se ne indichi una base e la sua dimensione.

Soluzione.
La condizione necessaria, $\mathbf{0} \in V$ è verificata solo se

$$x_1 = x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -k + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 1$$

Per $k = 1$, si può scrivere:

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - 3x_2 = 0 \right\}$$

quindi

$$\mathbf{x} \in V \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 = \frac{2}{3}x_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{2}{3}x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Il vettore $\left[1, \frac{2}{3}\right]$ costituisce una possibile base per V, quindi $\dim(V) = 1$.

1.1.3 *Esercizi proposti*

$\boxed{1}$ Siano V e W sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ con:

$$V = \left\{ \mathbf{x} = [a,b,c,d] \in \mathbb{R}^4 : a + c + d = 0 \right\}$$

$$W = \left\{ \mathbf{x} = [a,b,c,d] \in \mathbb{R}^4 : a + c = 0 \right\}$$

Dimostrare che V e W sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$, determinandone una base e la dimensione. $[R : \dim(V) = \dim(W) = 3]$

$\boxed{2}$ Siano V e W i sottospazi dell'esercizio precedente, determinare l'insieme X dei vettori che appartengono ad entrambi i sottospazi, verificando che è anch'esso un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e determinandone una base e dimensione. $[R : X = V \cap W, \dim(X) = 2]$

$\boxed{3}$ (a) Determinare l'insieme W dei vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali ai 2 vettori:

$$\mathbf{x} = [1,1,1], \quad \mathbf{y} = [1,1,-2]$$

$\left[R : W = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 : w_1 = -w_2 \wedge w_3 = 0 \right\}\right]$

(b) Verificare che $W \cup \mathbf{0}$ è sottospazio di $\mathbb{R}^3$. $[R : \dim(V) = \dim(W) = 1]$

(c) Determinare in W un vettore $\mathbf{z}$ di norma unitaria e prima componente positiva e verificare che i 3 vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.

$\left[R : \mathbf{z} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]. \text{ Costituiscono una base perché ortogonali a 2 a 2 e diversi da } \mathbf{0}\right]$

$\boxed{4}$ Sia V il sottospazio vettoriale generato dai vettori:

$$\mathbf{x} = [1,-1,0], \quad \mathbf{y} = [2,-1,3], \quad \mathbf{z} = [4,-1,3]$$

(a) Determinare una base di V e la sua dimensione.

[R : Una base è $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, $\dim(V) = 2$]

(b) Determinare per quali valori del parametro reale k, il vettore:

$$\mathbf{w} = [k,3,3]$$

appartiene a tale sottospazio. [$R : k = 0$]

1.2 *Autovalori, autovettori, diagonalizzazione*

1.2.1 *Esercizi svolti*

Esercizio 1. Data la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

determinarne gli autovalori ed i rispettivi autovettori.
Soluzione.
Gli autovalori di A sono le radici λ dell'equazione caratteristica:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

Le soluzioni sono:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

Poiché ogni valore ha cardinalità 1, gli autovalori hanno tutti molteplicità algebrica $m^a = 1$. Dobbiamo determinare gli autovettori associati agli autovalori.
Se il vettore:

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

è un autovettore della matrice A associato all'autovalore λ, allora:

$$A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Determiniamo gli autovettori di A risolvendo l'equazione:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

per ognuno dei 3 autovalori trovati:

$$\lambda_1 = -2 \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 3z = 0 \\ 5y = 0 \\ 3x + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'insieme di tutti gli autovettori associati ad un autovalore (con l'aggiunta del vettore nullo), costituisce un sottospazio vettoriale detto autospazio.
In questo caso, l'autospazio V_{λ_1}, costituito dagli autovettori:

$$\mathbf{v} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

associati all'autovalore $\lambda_1 = -2$, è generato dal vettore $[-1, 0, 1]$ che, essendo linearmente indipendente (è unico), forma anche una base per V_{λ_1} la cui dimensione è quindi $\dim V_{\lambda_1} = 1$; la dimensione della base dell'autospazio è la molteplicità geometrica (m^g) dell'autovalore.
Determiniamo gli autovettori dei due autovalori rimasti:

$$\lambda_2 = 3 \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x + 3z = 0 \\ 3x - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = \alpha \end{cases} \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

l'autospazio V_{λ_2} ha come base il vettore $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ e $\dim V_{\lambda_2} = 1$;

$$\lambda_3 = 4 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}-3 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 0\\ 3 & 0 & -3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x + 3z = 0 \\ -y = 0 \\ 3x - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix}\alpha\\0\\\alpha\end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

l'autospazio V_{λ_3} ha come base il vettore $[1,0,1]$ e $\dim V_{\lambda_3} = 1$.

Esercizio 2. Data la matrice:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & -k & 2k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

determinarne, per $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, gli autovalori, la loro molteplicità algebrica (m^a) e geometrica (m^g) ed i rispettivi autovettori.

Soluzione.

Determiniamo le soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & -k-\lambda & 2k \\ 0 & -k & 2k-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2-\lambda)\left[(2k-\lambda)(-k-\lambda) + 2k^2\right]$$
$$= \lambda(2-\lambda)(\lambda - k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = k$$

Analizziamo i singoli casi per ognuno dei 3 valori assegnati al parametro k:

- $k = 0$:
  abbiamo 2 autovalori distinti:

$$\lambda_1 = \lambda_3 = 0, \quad \lambda_2 = 2$$

  con molteplicità algebriche:

$$m^a_{\lambda_1} = 2, \quad m^a_{\lambda_2} = 1$$

Calcoliamo gli autovettori $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$:

$$\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 2v_1 - 2v_2 + 2v_3 = 0 \\ v_2 = \alpha \\ v_3 = \beta \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \alpha - \beta \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{\lambda_1} = [\alpha - \beta, \alpha, \beta]$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

L'autospazio V_{λ_1} ha quindi dimensione 2, perciò $m^g_{\lambda_1} = 2$;

$$\lambda_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} -2v_2 + 2v_3 = 0 \\ -2v_2 = 0 \\ -2v_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \alpha, v_2 = v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{\lambda_2} = [\alpha, 0, 0]$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

L'autospazio V_{λ_2} ha quindi dimensione 1, perciò $m^g_{\lambda_2} = 1$.

- $k = 1$:
  3 autovalori distinti:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2$$

con molteplicità algebriche:

$$m^a_{\lambda_1} = m^a_{\lambda_2} = m^a_{\lambda_3} = 1$$