

Prefazione

Consci del fatto che il lettore – soprattutto qualora sia uno studente concentrato sul mero superamento dell'esame di Matematica Generale – si sofferma raramente più di qualche minuto sulla Prefazione di un libro, saremo stringati e schematici.

Contenuto

Gli esercizi di questo volume sono parzialmente tratti – con modifiche ed aggiunte, spesso sostanziali – dai compiti di esame di Matematica Generale somministrati nel ventennio 2005-2024 agli studenti del Corso di Laurea in Economia Aziendale, Dipartimento di Economia e Impresa, Università degli Studi di Catania. Altri esercizi sono stati creati *ex novo*.

Questa terza edizione consta di trenta capitoli, ove ciascun capitolo è interamente dedicato ad un compito d'esame. I trenta capitoli del libro sono, nell'ordine, così articolati:

- quindici compiti d'esame, con gli svolgimenti completi e dettagliati di tutti gli esercizi;
- quindici compiti d'esame, senza gli svolgimenti degli esercizi (che sono demandati al lettore) ma con le risposte presentate in Appendice.

Obiettivo

Questo libro intende fornire agli studenti un ausilio per il superamento dell'esame scritto di Matematica Generale. A tal fine, lo svolgimento degli esercizi è inusualmente pedissequo, per consentire al lettore di cogliere la metodologia di risoluzione senza doversi preoccupare dei calcoli. Alcuni esercizi – soprattutto negli ultimi capitoli – costituiscono un'occasione per presentare in un modo alternativo importanti aspetti della teoria.

Struttura

Ciascun capitolo/compito d'esame consta di dodici quesiti, di cui sei formano la Parte A e sei la Parte B. Lo schema utilizzato per ciascuno dei dodici esercizi è quello dei quesiti con risposte a scelta multipla (5 risposte possibili, di cui soltanto una è corretta).

I sei quesiti di **Parte A** vertono su una miscellanea di argomenti, che sono di notevole importanza nel processo formativo di uno studente che intenda perseguire lo studio di discipline economiche mediante strumenti di carattere quantitativo. Tali argomenti sono trattati estesamente nei primi otto capitoli del seguente libro di recentissima pubblicazione:

[GL2024] Alfio Giarlotta e Fabio Lamantia.
Matematica Generale. Teoria e Pratica con quesiti a scelta multipla.
Volume I. Giappichelli 2024.

Gli argomenti dei quesiti oggetto della Parte A sono i seguenti:

1. elementi di logica e tavole di verità;
2. insiemistica, funzioni, cardinalità e relazioni binarie;
3. calcolo combinatorio;
4. insiemi di numeri reali;
5. vettori, matrici e determinanti;
6. sistemi lineari (parametrici e non parametrici);
7. rette nel piano e quesiti di carattere geometrico;
8. strutture algebriche (gruppi, anelli, corpi, campi e spazi vettoriali).

I sei quesiti di **Parte B** vertono su vari aspetti connessi allo studio delle funzioni reali di una variabile reale, trattati nel seguente libro di futura uscita (programmata per il 2025):

[GL2025] Alfio Giarlotta e Fabio Lamantia.
Matematica Generale. Teoria e Pratica con quesiti a scelta multipla.
 Volume II. Giappichelli 2025.

Tali argomenti sono i seguenti:

1. disequazioni e insiemi di esistenza;
2. limiti e forme indeterminate;
3. continuità e derivabilità;
4. teoremi fondamentali del calcolo differenziale;
5. applicazioni del calcolo differenziale;
6. studio e grafico di funzioni;
7. integrali indefiniti;
8. integrali definiti e calcolo di aree.

I sei quesiti di Parte A sono, a loro volta, suddivisi in tre gruppi di difficoltà crescente: **A.1** (3 esercizi), **A.2** (2 esercizi) e **A.3** (1 esercizio).¹

- **Parte A.1:** i tre quesiti di questa parte sono in genere i più semplici e non richiedono molti calcoli; nella maggioranza dei casi, per la loro risoluzione è sufficiente la mera applicazione delle definizioni e delle proprietà note.
- **Parte A.2:** i due quesiti di questa parte sono leggermente più complessi e possono richiedere uno svolgimento un po' più articolato.
- **Parte A.3:** l'unico quesito di questa parte è riservato agli studenti che vogliono cimentarsi nella risoluzione di un problema che richiede ragionamenti più profondi e/o una conoscenza sistematica della teoria; tuttavia, in genere, i relativi calcoli non sono né lunghi né difficili.

¹ Naturalmente, in sede di valutazione dell'elaborato scritto, il punteggio attribuito agli esercizi di Parte A.3 è maggiore di quello attribuito agli esercizi di Parte A.2, che a sua volta è maggiore di quello attribuito agli esercizi di Parte A.1. Al momento in cui scriviamo, a ciascun esercizio di Parte A.1 sono attribuiti 4 punti nel caso di risposta corretta (0 punti nel caso di assenza di risposta e -1 punto nel caso di risposta sbagliata); a ciascun esercizio di Parte A.2 sono attribuiti 8 punti nel caso di risposta corretta (0 punti nel caso di assenza di risposta e -2 punti nel caso di risposta sbagliata); all'unico esercizio di Parte A.3 sono attribuiti 12 punti nel caso di risposta corretta (0 punti nel caso di assenza di risposta e -3 punti nel caso di risposta sbagliata).

In modo assolutamente simmetrico, i sei esercizi di Parte B sono divisi in tre gruppi di difficoltà crescente: **B.1** (3 esercizi), **B.2** (2 esercizi) e **B.3** (1 esercizio).²

Suggerimenti per la lettura

Nel tentativo di conciliare rigore e agilità espositiva, commetteremo a volte dei leggeri abusi terminologici: ad esempio, parleremo indifferentemente di ‘area di un triangolo’ e ‘valore dell’area di un triangolo’, oppure ‘punto di flesso di una funzione’ e ‘punto di flesso per il grafico di una funzione’, etc. La ragione di questa lieve concessione all’imprecisione è il tentativo di non appesantire eccessivamente la trattazione con un rigore formale che renderebbe alcune formulazioni poco duttili e comprensibili.

Di seguito elenchiamo alcuni suggerimenti che il lettore è invitato a seguire al fine di massimizzare l’utilità derivante da un’attenta lettura di questo volume.

Nozioni teoriche. Non ci stancheremo mai di ripetere ciò che è da tutti i docenti ritenuto ovvio: *È inutile tentare di risolvere i quesiti d’esame in assenza di un’adeguata preparazione teorica.* L’esame scritto di Matematica Generale è indissolubilmente legato all’esame orale. Pertanto, consigliamo vivamente al lettore di assicurarsi che abbia capito e maturato a sufficienza tutte le nozioni teoriche utilizzate negli esercizi.

Risoluzioni degli esercizi. I primi quindici capitoli sono comprensivi di un accurato – a volte finanche prolisso – svolgimento dei dodici esercizi a risposta multipla in esso contenuti. Non è necessario affrontare gli esercizi di ciascun compito nell’ordine in cui sono presentati; ad esempio, il lettore potrebbe decidere di risolvere subito quelli che ritiene più consoni alla propria preparazione.

Ordine dei capitoli. Consigliamo di leggere i capitoli nell’ordine in cui sono presentati. La ragione è che nei primi capitoli dedichiamo una particolare attenzione ad introdurre la notazione che viene poi utilizzata nei capitoli successivi. Inoltre, alcuni ‘tipi’ di esercizi sono volutamente ripetuti in due o tre capitoli consecutivi, al fine di permettere al lettore di sviluppare la capacità di riconoscere problemi simili. Negli ultimi capitoli che svolgono per esteso compiti d’esame sono infine presenti delle brevi divagazioni, che suggeriscono come affrontare problemi similari o di carattere più generale.

Capitoli senza svolgimenti. Gli ultimi quindici capitoli del libro sono compiti d’esame senza svolgimenti. Si consiglia di affrontare i relativi esercizi soltanto dopo avere risolto i precedenti quindici compiti d’esame.

Riferimenti bibliografici

Lo svolgimento degli esercizi di questo libro assume esclusivamente la conoscenza di base di un Corso di Matematica Generale di primo livello. In particolare, non è necessaria la conoscenza della teoria delle funzioni reali di più variabili reali. Pertanto, qualsiasi libro di Matematica Generale che sia sufficientemente approfondito può considerarsi un adeguato supporto teorico. Tuttavia, per gli esercizi della parte A, faremo spesso riferimento al testo [GL2024] prima menzionato. Nelle successive – speriamo – edizioni di questo testo di esercizi faremo anche esplicito riferimento al Volume II del testo di Matematica Generale a cura dei medesimi autori [GL2025].

² La valutazione numerica degli esercizi di Parte B.1, B.2 e B.3 è analoga, rispettivamente, a quella degli esercizi di Parte A.1, A.2 e A.3.

Ringraziamenti

Ringrazio Silvia Angilella per la stesura dei compiti d'esame da cui alcuni esercizi di questo libro sono tratti, nonché per i vent'anni di insegnamento svolto assieme, in armonia e comunanza di vedute. Ringrazio altresì i miei stimati colleghi Fabio Lamantia e Damiano Rossello per alcuni commenti relativi al contenuto e alla formulazione dei quesiti.

Sono oltremodo grato ai miei cari allievi Angelo (Petralia), Davide (Carpentiere), Ester (Sudano) e Sergio (Sessa) per un attento controllo degli svolgimenti degli esercizi, nonché per tante utili osservazioni formulate 'con l'occhio dello studente'. Relativamente a questa terza edizione, ringrazio anche svariati studenti che hanno segnalato sviste nelle precedenti edizioni nonché suggerito svolgimenti alternativi rispetto a quelli presentati. In ogni caso, gli eventuali errori presenti in questo volume sono esclusivamente a me ascrivibili.

Desidero inoltre esprimere la mia gratitudine allo Staff della Casa Editrice Giappichelli per il supporto tecnico, la pazienza e l'attenzione che mi ha dimostrato nel corso dell'elaborazione delle varie edizioni di questo libro.

Novissima autem non minimus, ringrazio il mio caro amico Domenico Cantone³ per avere acconsentito all'utilizzo di un suo disegno⁴ nella copertina di questo volume nonché la mia amata sorella Stefania Giarlotta per l'interpretazione grafica del disegno e per il progetto della copertina.

³ Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Catania.

⁴ Il disegno originario, che esibisce un'altra dimostrazione puramente grafica del famoso Teorema di Pitagora, è apparso nel seguente articolo: Domenico Cantone (2020), "Yet another proof without words of the Pythagorean Theorem", *Mathematics Magazine* 93(4), p. 306.

Capitolo 1

Parte A.1

Esercizio 1. Siano \vec{r} ed \vec{s} le rette di equazione, rispettivamente, $x = -1$ e $x = 5$. Sia inoltre \vec{t} una retta di equazione $y = mx + n$ passante per il punto $P \equiv (-1, 3)$. Per quale valore reale POSITIVO di $m \in \mathbb{R}$ l'area del trapezio delimitato da \vec{r} , \vec{s} , \vec{x} e \vec{t} vale 21?

- 1 $m = \frac{2}{7}$
- 2 $m = \frac{1}{6}$
- 3 $m = \frac{4}{9}$
- 4 $m = \frac{3}{8}$
- 5 Nessuna delle altre risposte

Esercizio 2. Quanti sono i numeri naturali $c_1 c_2$ di due cifre tali che $|c_1 - c_2| \leq 1$? (Ad esempio, i numeri 10, 89 e 44 soddisfano la condizione richiesta.)

- 1 14
- 2 17
- 3 21
- 4 26
- 5 Nessuna delle altre risposte

Esercizio 3. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & \lambda & \frac{10}{3} \\ 1 & -2 & \lambda \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

con λ parametro reale. Quale delle seguenti asserzioni è VERA?

- 1 $r(A) = 3$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$
- 2 Per $\lambda = 2$, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
- 3 Per $\lambda = 0$, $\det(\frac{1}{2}A) = 6$
- 4 Esistono infiniti valori di λ per cui $r(A) = 2$
- 5 Nessuna delle altre risposte

Parte A.2

Esercizio 4. Siano dati gli insiemi numerici

$$X = \left\{ 2 + \frac{3}{n+2} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{2\} \quad \text{e} \quad Y = \left\{ 2 - \frac{3}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup [-1, 1],$$

ove $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Quale delle seguenti asserzioni è VERA?

- 1 $DX \setminus DY = \emptyset$
- 2 $\max Y = \min X$
- 3 $X \cup Y$ non è chiuso
- 4 $D(X \cup Y)$ è un intervallo chiuso
- 5 FY è un insieme finito

Esercizio 5. Sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + y + 4z = 2 \\ x - 3z = a \\ 2x + y + a^2z = 2 \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Quale delle seguenti asserzioni è VERA?

- 1 Il sistema è sempre possibile
- 2 Per $a = 2$, la terna $(2, -2, 0)$ è l'unica soluzione del sistema
- 3 Esistono due valori distinti di a per cui il sistema è impossibile
- 4 Esiste esattamente un valore di a per cui il sistema è indeterminato
- 5 Nessuna delle altre risposte

Parte A.3

Esercizio 6. Siano dati i seguenti numeri naturali:

- (a) $P_{2,2,2,2,2}^{(r)}$
- (b) P_8
- (c) $D_{9,5}$
- (d) $D_{7,4}^{(r)}$
- (e) $C_{5,6}^{(r)} \cdot C_{3,2}^{(r)}$.

Quale delle seguenti asserzioni è VERA?

- 1 (a) > (b) > (c) > (e)
- 2 (b) > (a) > (d)
- 3 (c) > (b) > (e)
- 4 (d) > (c) > (e)
- 5 (a) > (b) > (d) > (c)

Parte B.1**Esercizio 7.** Qual è l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$2\sqrt{|x^2-7|} \leq 8 ?$$

- 1 $[-3, 3]$
- 2 $]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$
- 3 $[-4, 4]$
- 4 $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$
- 5 Nessuna delle altre risposte

Esercizio 8. Sia data la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} a e^{x-\frac{1}{2}} & \text{per } x \leq 1/2 \\ x^2 - 4x + b & \text{per } x > 1/2 \end{cases}$$

con a, b parametri reali. Per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f è derivabile in \mathbb{R} ?

- 1 $(a, b) = (-3, -\frac{1}{8})$
- 2 $(a, b) = (1, \frac{11}{4})$
- 3 $(a, b) = (1, -\frac{3}{4})$
- 4 $(a, b) = (-3, \frac{7}{4})$
- 5 Nessuna delle altre risposte

Esercizio 9. Quanto vale

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left[1 + \log(3+x) \right]^{\frac{1}{\sin(\pi x)}} ?$$

- 1 $\frac{1}{\pi}$
- 2 $\frac{\pi}{e}$
- 3 $e^{\frac{1}{\pi}}$
- 4 $e^{-\pi}$
- 5 Nessuna delle altre risposte

Parte B.2

Esercizio 10. Sia data la funzione definita dalla legge

$$f(x) = \frac{x-1}{|x-2|}$$

nel suo insieme di esistenza. Quale delle seguenti affermazioni è VERA?

- 1 f è decrescente in $x = 1$ e $x = 3$
- 2 f ha un punto di flesso
- 3 f ha esattamente un asintoto orizzontale
- 4 f ha un minimo assoluto
- 5 $\int_0^1 f(x) dx < -\frac{1}{4}$

Esercizio 11. Quanto vale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x-5}{x^2-3x+2} dx ?$$

- 1 $-3 \log 2 + 2 \log 3$
- 2 $3 \log 2 + 4 \log 3$
- 3 $-\log 6$
- 4 $5 \log 2 - 3 \log 3$
- 5 $\log 2 - \log 3$

Parte B.3

Esercizio 12. Sia $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(0) = f(1) = 1$ e $f(2) = -1$. Quale delle seguenti asserzioni è FALSA?

- 1 L'immagine di f ristretta a $[0, 4]$ contiene l'intervallo $[-1, 1]$
- 2 Esiste $c \in]0, 1[$ tale che $f(c) = 2c$
- 3 Se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in [3, +\infty[$, allora f ha un minimo relativo e assoluto
- 4 Se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in [5, +\infty[$, allora f ha un massimo assoluto
- 5 Se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in]0, 1[$, allora $\int_0^1 f(x) dx > 1$