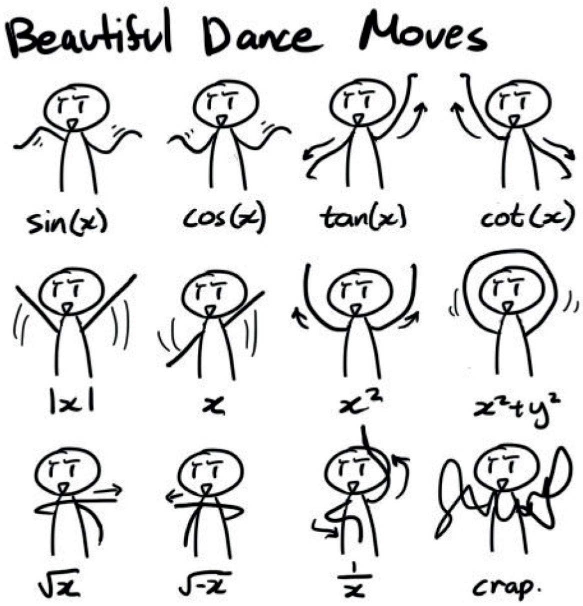
Francesco Brega - Grazia Messineo

Note di matematica

Esercizi



Giappichelli

Prefazione

Studiare matematica, a qualunque livello lo si faccia, non significa fare esercizi. Studiare matematica infatti significa seguire un filo di pensieri, un sentiero di idee che si concatenano una all'altra. Insomma, significa studiare la teoria e saperne ricostruire gli snodi cruciali. Allora, perché un eserciziario? Perché, come per ogni sentiero, è importante avere segnali che ci dicano se siamo oppure no sulla strada giusta. Ecco, in matematica, gli esercizi sono questo: segnali. Sono cioè il segnale che ci permette di capire se la teoria è stata compresa correttamente; sono una verifica indispensabile dello studio teorico compiuto e, allo stesso tempo, una misura dei propri progressi.

Oggigiorno, grazie alle numerose risorse disponibili online, non sussiste il problema di reperire esercizi di ogni genere e natura; si pone, al contrario, il problema di filtrare e selezionare, tra quello disponibile, il materiale più idoneo. Spesso lo studente non è in grado di affrontare da solo questa scelta e, di fronte all'abbondanza delle possibilità che gli vengono offerte, rischia di esercitarsi in modo dispersivo e inefficace. Soprattutto rischia di svolgere un gran numero di esercizi senza assimilare appieno la teoria.

Il presente volume vuole quindi essere uno strumento che accompagna lo studente nella sua preparazione proponendo esercizi svolti, da svolgere ed esercizi interattivi, stimolandolo però sempre ad un preliminare confronto con gli aspetti teorici.

Gli autori hanno una lunga esperienza didattica in corsi universitari e si sono sempre dedicati con entusiasmo all'insegnamento; siamo quindi certi il presente eserciziario sarà un valido aiuto nella preparazione di molti studenti.

L'eserciziario può ovviamente essere utilizzato in modo autonomo, ma si può considerare il naturale completamento del testo *"Note di Matematica"* [2] e la prosecuzione del testo *"Note di Matematica: Nozioni preliminari"* [1].

Monica Bianchi
Enrico Miglierina
Salvatore Vassallo

Nota degli autori

Questo eserciziario è stato pensato, da un lato, come compendio al testo di teoria *"Note di matematica"* [2], anche se può essere usato in modo autonomo. Tutti i riferimenti al manuale, presenti all'inizio di ogni capitolo e nella risoluzione degli esercizi, sono tratti da questo testo.
Dall'altro lato, esso è la naturale prosecuzione del testo "Note di Matematica: nozioni preliminari" [1]: gli argomenti contenuti in quel testo sono prerequisiti *essenziali* per poter comprendere le risoluzioni degli esercizi svolti di questo manuale e per poter affrontare autonomamente gli esercizi proposti.
Il testo è composto da capitoli (associati agli argomenti principali trattati nel testo) suddivisi in 3 sezioni: la prima, di esercizi svolti, dove viene fornita allo studente una panoramica delle tipologie di esercizi e di tecniche risolutive; la seconda, dove vengono proposti esercizi da risolvere (con soluzioni) così che lo studente possa esercitarsi attivamente ed autonomamente sull'argomento; la terza, dove vengono proposti esercizi completamente svolti tratti da temi d'esame dei corsi di Matematica Generale II dell'Università Bicocca e di Matematica Generale dell'Università Cattolica, dall'A.A. 2002/03 ad oggi.
Questo volume è integrato dal testo *"Note di Matematica: esercizi e complementi"* [6], nel quale sono raccolti alcuni esercizi di approfondimento su alcuni temi (algebra lineare, calcolo integrale, successioni e serie) che possono risultare utili a chi desidera approfondire la propria preparazione, sia per l'esame di base che per eventuali corsi di matematica "avanzati".
Insieme al testo viene inoltre fornita una password per accedere alla piattaforma on-line, dove sono presenti degli esercizi interattivi autocorrettivi e con soluzioni, che lo studente può utilizzare a completamento della propria preparazione.

Francesco Brega
Grazia Messineo

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare tutti coloro che, a diverso titolo, sono stati coinvolti nella stesura di questo volume.
Ringrazio le professoresse Monica Bianchi e Rita Pini, che mi hanno fortemente incoraggiata a scrivere questo eserciziario.
Ringrazio la professoressa Maddalena Plazzi e il professor Alvise Merini, per avermi trasmesso, durante gli anni del Liceo, l'amore e la passione per la matematica.
Ringrazio inoltre la professoressa Carla Peri, per avermi sostenuta sempre nei mesi in cui ho scritto la prima edizione di questo volume e per averla pazientemente rivista e corretta.
Un ringraziamento speciale al professor Salvatore Vassallo, per gli spunti creativi che mi ha dato, per la paziente disponibilità e per avermi insegnato ad utilizzare LaTeX.
Il ringraziamento più grande va alla mia famiglia e soprattutto a mio marito Alceo, per la pazienza e per il sostegno che mi hanno dimostrato in questi mesi.

Grazia Messineo

Ringrazio la professoressa Monica Bianchi e la professoressa Rita Pini, che hanno voluto che scrivessi questo eserciziario.
Un grazie di cuore ai due colleghi (ma soprattutto amici) Carla e Flavio per il loro contributo e per la loro pazienza.
Un grazie ed un bacio, infine, a Jo, per avermi sopportato non solo durante la stesura di questo testo …

Francesco Brega

Capitolo 1

Algebra Lineare

1.1 *Vettori e Matrici*

1.1.1 *Premessa*

I contenuti teorici di questo capitolo sono illustrati nei paragrafi 1.4.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 e 2.8 del libro *Note di Matematica* [2].

1.1.2 *Esercizi svolti*

Esercizio 1. Dati i vettori:

$$\mathbf{a} = [3, -2, 12], \qquad \mathbf{b} = [2, 1, -5]$$

determinare il vettore somma $\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.
Soluzione.
Si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= [3, -2, 12] + [2, 1, -5] \\ &= [3 + 2, -2 + 1, 12 - 5] \\ &= [5, -1, 7]. \end{aligned}$$

Risulta, quindi, $\mathbf{s} = [5, -1, 7]$.

Esercizio 2. Dato il vettore:

$$\mathbf{a} = [4, 5, -8]$$

e lo scalare $k = -3$, determinare il vettore $\mathbf{p} = k \cdot \mathbf{a}$.

Soluzione.
Si ha

$$\begin{aligned} k \cdot \mathbf{a} &= -3 \cdot [4{,}5, -8] \\ &= [-3 \cdot 4, -3 \cdot 5, -3 \cdot (-8)] \\ &= [-12, -15{,}24]. \end{aligned}$$

Risulta, quindi, $\mathbf{p} = [-12, -15{,}24]$.

Esercizio 3. Dati i vettori:

$$\mathbf{a} = [1{,}3{,}6], \qquad \mathbf{b} = [-3{,}1{,}5]$$

determinarne il prodotto scalare $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.
Soluzione.
Si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= [1{,}3{,}6] \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 5 \\ &= 30. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Date le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

determinare, se possibile, $C = 2A - 3B$.
Soluzione.
Poiché $A \in \mathcal{M}(2 \times 3), B \in \mathcal{M}(2 \times 3)$, allora C esiste ed è $C \in \mathcal{M}(2 \times 3)$.

$$\begin{aligned} C &= 2A - 3B \\ &= 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 & 6 \\ -21 & 3 & 24 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -7 & -4 & 0 \\ 29 & 7 & -36 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 5. Determinare la matrice $C = A \cdot B$, dove:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcolare, poi, l'elemento di posto $(2{,}1)$ della matrice $D = B \cdot A$.
Soluzione.
Poiché $A \in \mathcal{M}(2 \times 3), B \in \mathcal{M}(3 \times 2)$, il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda matrice. Quindi C esiste ed è $C \in \mathcal{M}(2\times 2)$, ha cioè tante righe quante quelle della prima matrice e tante colonne quante quelle della seconda matrice.
Ponendo

$$\mathbf{r_1} = [1{,}5, -2], \qquad \mathbf{r_2} = [0{,}3, -1]$$

i vettori riga della matrice A, e

$$\mathbf{c_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

i vettori colonna della matrice B:

$$\begin{aligned} C &= A \cdot B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c_1} \\ \mathbf{c_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{r_1} \cdot \mathbf{c_1} & \mathbf{r_1} \cdot \mathbf{c_2} \\ \mathbf{r_2} \cdot \mathbf{c_1} & \mathbf{r_2} \cdot \mathbf{c_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 5 \cdot 3 - 2 \cdot 5 & 1 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 1 \cdot 5 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 + 15 - 10 & 0 - 5 - 4 \\ 0 + 9 - 5 & 0 - 3 - 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

L'elemento di posto $(2{,}1)$ della matrice $D = B \cdot A$ si ottiene effettuando il prodotto scalare tra la seconda riga di B e la prima colonna di A:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 3.$$

Esercizio 6. Determinare per quale valore del parametro a, le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 - a & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

sono commutabili rispetto al prodotto.
Soluzione.
Essendo $A \in \mathcal{M}(2 \times 2), B \in \mathcal{M}(2 \times 2) \Rightarrow A \cdot B$ e $B \cdot A$ esistono e si ha

$$A \cdot B \in \mathcal{M}(2 \times 2) \quad \text{e} \quad B \cdot A \in \mathcal{M}(2 \times 2)$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1+4 & -4+6 \\ 1-a & -4(1-a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1-a & -4(1-a) \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -1-4+4a & 2 \\ 2+3-3a & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a-3 & 2 \\ 5-3a & 4 \end{bmatrix}$$

Perché le due matrici risultino commutabili rispetto al prodotto, deve essere:

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1-a & -4(1-a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a-3 & 2 \\ 5-3a & 4 \end{bmatrix}.$$

Uguagliando le componenti che occupano la medesima posizione si ottiene il seguente sistema nell'incognita a:

$$\begin{cases} 4a-3=5 \\ 1-a=5-3a \\ -4(1-a)=4 \end{cases}$$

La soluzione del sistema, $a = 2$, dà il valore cercato.

Esercizio 7. Date le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

trovare una matrice X tale che:

$$A \cdot X = B.$$

Soluzione.
Si osserva che, per rendere conforme il prodotto, anche la matrice X deve avere due righe e due colonne, inoltre, ad X vengono assegnati elementi incogniti:

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} A \cdot X &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot a + 2 \cdot c & 1 \cdot b + 2 \cdot d \\ 0 \cdot a - 1 \cdot c & 0 \cdot b - 1 \cdot d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -c & -d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Affinché la matrice ottenuta sia uguale alla matrice B assegnata, tutti i suoi elementi devono essere uguali a quelli di B che occupano la medesima posizione:

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ottiene il seguente sistema a 4 incognite a,b,c,d:

$$\begin{cases} a+2c = 3 \\ b+2d = 4 \\ -c = -1 \\ -d = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 8. Calcolare il determinante della seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -25 & 216 & -520 & 120 \\ 0 & 1 & 587 & 321 & -371 \\ 0 & 0 & -1 & 412 & 821 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Soluzione.
Poiché A è una matrice triangolare, allora il determinante è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale principale:

$$\begin{aligned} \det A &= \prod_{i=1}^{5} a_{i,i} \\ &= a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} \cdot a_{4,4} \cdot a_{5,5} \\ &= 6 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 4 \cdot 2 = -48. \end{aligned}$$

Esercizio 9. Determinare il valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ tale che la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -300 & 127 & 23 \\ 5a & 0 & 10 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

risulti singolare.

Soluzione.

A è singolare se e solo se $\det A = 0$.

Calcoliamo il determinante di A mediante il metodo di Laplace partendo dalla seconda colonna (presenta 2 elementi nulli):

$$\begin{aligned}\det A &= -127 \cdot \begin{vmatrix} 5a & 10 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -127 \cdot (5a \cdot 2 - (3 \cdot 10)) \\ &= -127 \cdot (10a - 30).\end{aligned}$$

$\det A = 0 \iff 10a - 30 = 0, \quad a = \frac{30}{10} = 3.$

Esercizio 10. Calcolare il determinante della matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

utilizzando la regola di Laplace.

Soluzione.

L'esercizio viene risolto partendo sia da una riga (svolgimento a), sia da una colonna (svolgimento b).

a) Sviluppiamo secondo la terza riga:

$$\begin{aligned}\det A &= -1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot [(-2 \cdot 2) - (-2 \cdot 4)] - 1 \cdot [(3 \cdot 2) - (1 \cdot 4)] + \\ &\quad + [(3 \cdot (-2)) - (1 \cdot (-2))] \\ &= -1 \cdot 4 - 1 \cdot 2 - 4 = -10.\end{aligned}$$

b) Sviluppiamo secondo la prima colonna:

$$\begin{aligned}\det A &= 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot [(-2 \cdot 1) - (1 \cdot 2)] - 1 \cdot [(-2 \cdot 1) - (1 \cdot 4)] + \\ &\quad - 1 \cdot [(-2 \cdot 2) - (-2 \cdot 4)] \\ &= 3 \cdot (-4) - 1 \cdot (-6) - 4 = -10.\end{aligned}$$

Esercizio 11. Calcolare il determinante della matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

utilizzando la regola di Sarrus.
SOLUZIONE.
La regola di Sarrus è applicabile solamente a matrici di ordine 3 e consiste nell'orlare la matrice con le prime due colonne; il determinante si calcola effettuando le somme dei prodotti tra gli elementi della diagonale principale e delle diagonali parallele, e le differenze dei prodotti degli elementi delle diagonali opposte:

$$\begin{aligned}\det A = &-1\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot(-4) + 0\cdot 1\cdot 1 - (2\cdot 1\cdot 2) - (-1\cdot 3\cdot 1) - \\ &-(0\cdot 1\cdot(-4)) = -2-24-0-4+3-0 = -27.\end{aligned}$$

Esercizio 12. Data la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 3+a & -1 & 1 \\ 2 & 2+a & -2 \\ 2 & -1 & 1+a \end{bmatrix}$$

determinare per quali valori del parametro a si ha $\det A = 0$
SOLUZIONE.
Per risolvere l'esercizio, applichiamo la proprietà del determinante per la quale se ad una riga (colonna) sostituiamo una combinazione lineare di se stessa con altre righe (colonne), il determinante non cambia:

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 3+a & -1 & 1 \\ 2 & 2+a & -2 \\ 2 & -1 & 1+a \end{vmatrix} \text{(} 1^a \text{ riga = } 1^a \text{ riga - } 3^a \text{ riga)} \\
&= \begin{vmatrix} 1+a & 0 & -a \\ 2 & 2+a & -2 \\ 2 & -1 & 1+a \end{vmatrix} \text{(} 1^a \text{ colonna= } 1^a \text{ colonna + } 3^a \text{ colonna)} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 2+a & -2 \\ 3+a & -1 & 1+a \end{vmatrix} \text{(sviluppo in base alla prima riga)} \\
&= 1\cdot \begin{vmatrix} 2+a & -2 \\ -1 & 1+a \end{vmatrix} - a\cdot \begin{vmatrix} 0 & 2+a \\ 3+a & -1 \end{vmatrix} \\
&= 1\cdot[(2+a)\cdot(1+a) - (-1\cdot(-2))] - a\cdot[0\cdot(-1) - (3+a)\cdot(2+a)] \\
&= a(a+3)^2.
\end{aligned}$$

$$\det A = 0 \Rightarrow a(a+3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -3 \end{cases}.$$

Esercizio 13. Data la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

stabilire se è invertibile e, in caso affermativo, determinare la matrice inversa A^{-1} utilizzando la definizione.
Soluzione.
Per stabilire se A è invertibile, occorre calcolarne il determinante e verificare che sia diverso da zero. Dato che $\det A = -7$, la matrice è invertibile.
Per calcolare la matrice inversa viene richiesto di applicare la definizione, cercando una matrice, A^{-1}, che moltiplicata per A dia la matrice identità I:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Poniamo:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

si ha:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a-3c & b-3d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a-3c & b-3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uguagliando le componenti di indice comune si ottiene il seguente sistema lineare a 4 incognite a,b,c,d:

$$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ 2b + d = 0 \\ a - 3c = 0 \\ b - 3d = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzione:

$$\begin{cases} a = \frac{3}{7} \\ b = \frac{1}{7} \\ c = \frac{1}{7} \\ d = -\frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}.$$

Per verificare il risultato, calcoliamo $A^{-1} \cdot A$:

$$
\begin{aligned}
A^{-1} \cdot A &= \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \cdot 2 + \frac{1}{7} \cdot 1 & \frac{3}{7} \cdot 1 + \frac{1}{7} \cdot (-3) \\ \frac{1}{7} \cdot 2 - \frac{2}{7} \cdot 1 & \frac{1}{7} \cdot 1 - \frac{2}{7} \cdot (-3) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.
\end{aligned}
$$

Esercizio 14. Calcolare l'elemento di posto $(1, 2)$ della matrice inversa A^{-1} di:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -36 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione.
Dato che $\det A = 9 \neq 0$, la matrice inversa A^{-1} esiste e si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

dove A^* è la *matrice aggiunta*, ovvero la matrice dei complementi algebrici di A^T. Calcoliamo quindi:

- la trasposta della matrice A:

$$A^T = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -36 & 1 \end{bmatrix}$$

- la matrice aggiunta A^*

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 36 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

- la matrice inversa

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \cdot A^* \\
&= \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 36 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

L'elemento di posto (1,2), cioè l'elemento che appartiene alla prima riga e seconda colonna è 4.

Esercizio 15. Determinare il valore del parametro k affinché la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

non sia invertibile.
SOLUZIONE.
Perché A non sia invertibile deve essere $\det A = 0$:

$$\begin{aligned}\det A &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} k & 1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} \\ &= [(3 \cdot 1) - (-6 \cdot 2)] + [(k \cdot 1) - (-6 \cdot 1)] \\ &= 15 + k + 6 = k + 21. \\ \det A &= 0 \Rightarrow k + 21 = 0 \Rightarrow k = -21.\end{aligned}$$

Esercizio 16. Data la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & a \end{bmatrix}$$

determinare il valore del parametro a tale che $r(A) = 2$.
SOLUZIONE.
Si ha $r(A) \geq 2$, poiché $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Perché sia $r(A) = 2$, tutti i minori di ordine 3 (cioè i determinanti delle sottomatrici di ordine 3 di A) devono essere uguali a 0:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \forall a \in \mathbb{R};$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \end{vmatrix} = -1(a - 15) \Rightarrow -a + 15 = 0 \Rightarrow a = 15;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & a \end{vmatrix} = 5(a - 15) \Rightarrow a - 15 = 0 \Rightarrow a = 15;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = 0, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Quindi si ha $r(A) = 2$ per $a = 15$.

Esercizio 17. Determinare il rango della matrice:

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & 3 + k & k^2 \end{bmatrix}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
Soluzione.
Poiché $A \in \mathcal{M}(2 \times 3)$ sicuramente si ha $r(A) \leq 2$. Calcoliamo i 3 diversi minori di A di ordine 2, determinando per quali valori di k si annullano:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} k & 1 \\ 0 & 3+k \end{vmatrix} = k \cdot (k+3) = 0 \Rightarrow k = 0 \vee k = -3$$
$$|A_2| = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k^2 \end{vmatrix} = k^3 = 0 \Rightarrow k = 0,$$
$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3+k & k^2 \end{vmatrix} = k^2 = 0 \Rightarrow k = 0.$$

Quindi:

- per $k = 0$ si ha $r(A) = 1$ poiché tutti i minori di ordine 2 sono nulli;
- per $k \neq 0$ si ha $r(A) = 2$ poiché non tutti i minori di ordine 2 si annullano.

Esercizio 18. Determinare il rango della matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & -10 \end{bmatrix}$$

utilizzando il Teorema di Kronecker.
Soluzione.
Il Teorema di Kronecker permette di determinare il rango di una matrice limitando il calcolo di minori di ordine elevato. Consiste nello scegliere una sottomatrice di ordine 2 con determinante diverso da 0 ed orlarla con tutte le righe e le colonne restanti ottenendo delle sottomatrici di ordine 3; se tutti i minori ottenuti da queste sottomatrici sono 0 allora $r(A) = 2$ altrimenti si ripete la procedura orlando la sottomatrice di ordine 3 con determinante diverso da 0 e così via; se l'ordine dei minori tutti nulli è n allora $r(A) = n - 1$.
Applichiamo il Teorema all'esercizio, scegliendo una sottomatrice A_1 di ordine 2 con determinante diverso da 0:

$$A \in \mathcal{M}(3 \times 4) \Rightarrow r(A) \leq 3$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \det A_1 = -1 \neq 0$$

orliamo A_1 ottenendo due sottomatrici di ordine 3:

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \det A_2 = 6 - 14 + 4 + 4 = 0;$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -10 \end{bmatrix}, \qquad \det A_3 = 10 - 10 = 0.$$

Per il Teorema di Kronecker $r(A) = 2$.
Si noti che utilizzando invece la definizione di rango avremmo dovuto controllare 4 minori di ordine 3.

Esercizio 19. Data la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ a-2 & 0 & a \end{bmatrix}$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) Per qualche valore di a si ha $r(A) = 1$;
(b) Se $a \neq 0$ la matrice è invertibile;
(c) Se $a = 1 \Rightarrow r(A) = 2$;
(d) Se $a \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$.

Soluzione.

(a) Si ha

$$\begin{aligned} \det A &= a \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a-2 & a \end{vmatrix} \\ &= a \cdot (a + a - 2) = 2a \cdot (a-1) = 0 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \end{aligned}$$

Quindi

- Se $a = 0$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$
e quindi $r(A) = 2$;
- Se $a = 1$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$
e quindi $r(A) = 2$;

- se $a \neq 0$ e $a \neq 1$ si ha $\det A \neq 0$ e quindi $r(A) = 3$.

L'affermazione è quindi *FALSA*.

(b) *FALSA*, perché, ad esempio, se $a = 1$ si ha $\det A = 0$: A è singolare e quindi non invertibile.

(c) *VERA* come visto nella discussione del punto (a).

(d) *FALSA*, poiché, ad esempio, se $a = 1$ allora $r(A) = 2 \neq 3$.

1.1.3 *Esercizi proposti*

1 Si eseguano le seguenti operazioni tra vettori:

(a) $[2{,}5, -1{,}18] + [3{,}9{,}0, -4] - [12{,}7, -2{,}9]$ $\quad [R : [-7{,}7{,}1{,}5]]$

(b) $2 \cdot [12, -4{,}7] - 3 \cdot [2, -2{,}5] - \frac{2}{3} \cdot [6, -2{,}1]$ $\quad [R : [14, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}]]$

(c) $[3{,}2{,}5] \cdot [-1, -3{,}0]$ $\quad [R : -9]$

(d) $-1 \cdot [0{,}3{,}6, -5, -3, -2] + \frac{1}{3} \cdot [1, -2{,}12, -9, -5{,}0]$ $\quad [R : [\frac{1}{3}, -\frac{11}{3}, -2{,}2{,}\frac{4}{3}{,}2]]$

(e) $\left([6, -2{,}7{,}4] \cdot \left[\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -1, \frac{1}{3}\right]\right) + 2$ $\quad [R : \frac{2}{3}]$

(f) $\left[1, -4{,}7, -\frac{1}{4}\right] + 2 \cdot \left[4{,}2, -3, \frac{1}{4}\right]$ $\quad [R : [9{,}0{,}1{,}\frac{1}{2}]]$

2 Si eseguano, se possibile, le seguenti operazioni tra matrici:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -6 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \left[R : \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right]$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \left[R : \begin{bmatrix} 1 & 16 & 0 \\ 13 & 0 & -4 \\ 7 & -2 & 5 \\ -11 & 3 & -4 \end{bmatrix}\right]$

(c) $\begin{bmatrix} 14 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 9 & -11 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ $\quad [R : \text{non definita}]$

(d) $-2 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ $\quad \left[R : \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -18 & 10 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}\right]$

(e) $\left(\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^T.$ $\quad \left[R : \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -9 & -14 & -3 \end{bmatrix}\right]$

3 Risolvere le seguenti espressioni:

(a) $2A - 3B + C$
con: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\left[R : \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 10 & -9 \end{bmatrix}\right]$

(b) $(-A + 2B - C)^T$
con: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

$\left[R : \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}\right]$

4 Risolvere le seguenti equazioni matriciali nell'incognita X:

(a) $2A - X = 5B$
con: $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\left[R : X = \begin{bmatrix} 8 & 21 \\ -12 & -5 \end{bmatrix}\right]$

(b) $3(A - X) + 2B = A$ con: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\left[R : X = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix}\right]$

5 Verificare che la matrice X:

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

annulla l'espressione:

$$Y = X^2 + 5X + 2I.$$

6 Date le matrici A, B, determinare, se possibile, i prodotti $A \cdot B$ e $B \cdot A$:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\left[R : A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B \cdot A \text{ non definito}\right]$

(b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

$\left[R : A \cdot B = \begin{bmatrix} 53 & 29 \\ 50 & 26 \end{bmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 36 & 28 & 48 \\ 9 & 7 & 12 \\ 29 & 19 & 36 \end{bmatrix}\right]$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$

$\left[R : A \cdot B \text{ non definito}, \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{bmatrix}\right]$