Cesarino Bertini
Gianfranco Gambarelli
Izabella Stach

Strategie

Introduzione alla Teoria dei Giochi e delle Decisioni

SECONDA EDIZIONE

Giappichelli

Alcune parti di questo libro sono tratte da pubblicazioni di Gianfranco Gambarelli uscite su riviste (*Periodico di Matematiche*, 2014, n. 3, vol. 6, Serie XI, pp. 51-86; *Bollettino dei docenti di matematica del Cantone Ticino*, 2014, n.68, pp. 9-18 e 2015, n. 70, pp. 47-70; *Didattica delle Scienze*, 2002, n. 219, pp. 43-45; *MatematicaMente*, 2012, n. 169, pp. 1-2 e n. 170, pp. 1-2) o edite in volumi (*Atti dell'Ateneo di Scienze, Lettere ed Arti di Bergamo*, 2001/2002, vol. 65, pp. 235-242; *Giochi competitivi e cooperativi*, II ed. Giappichelli, Torino, 2003; *Metodi di Decisione*, Hoepli, Milano, 1992, con G. Pederzoli; *Matematica indolore*, V ed. Giappichelli, Torino, 2005, con S. Mercanti).

La collaborazione di Alessandra Buratto, Daniel Faccini, Franco Vito Fragnelli, Salvatore Greco, Luca Grosset, Francesca Maggioni, Benedetto Matarazzo, Guillermo Owen, Roman Slowinski, Luigi Vannucci, Aldo Ventre, Bruno Viscolani e Maurizio Zola è stata offerta a titolo gratuito.

Gli Editori
Cesarino Bertini
Gianfranco Gambarelli
Izabella Stach

Izabella Stach e Harold W. Kuhn, Foggia, 2006

Izabella Stach e Jerzy Hołubiec, Foggia, 2006

Marida Bertocchi, Bergamo

Gianfranco Gambarelli, Cesarino Bertini, Angelo Uristani e Harold W. Kuhn, Bergamo, 2009

Sergiu Hart, Gianfranco Gambarelli e John Nash, Sao Paulo, 2010

Giorgio Pederzoli, Toronto

Giorgio P. Szegö

Presentazione

In questo libro ci proponiamo di illustrare in modo semplice e concreto i principali metodi di decisione strategica per problemi di scelte individuali (Teoria delle Decisioni) e di interazioni fra vari decisori (Teoria dei Giochi).

Illustreremo inoltre alcune applicazioni in vari ambiti della vita reale: economiche, politiche, sociali, ambientali, aziendali, finanziarie, militari, assicurative, sportive, mediche.

I Prerequisiti

Trattandosi di un libro introduttivo, abbiamo cercato di limitare l'uso della Matematica a poche nozioni indispensabili: equazioni e disequazioni di primo e secondo grado e geometria analitica elementare.

Abbiamo ricordato alcune definizioni di comprensione immediata, come sommatoria, fattoriale, determinante di matrici fino al terzo ordine.

Daremo per note nozioni di base, quali punto interno, esterno, di frontiera ecc...

Abbiamo invece omesso i prerequisiti di calcolo differenziale necessari alla comprensione dei capitoli sull'ottimizzazione, peraltro non indispensabili per la parte restante del testo.

Capitolo 1

Dalla Realtà al Modello

I dati di un fenomeno possono essere desunti da misurazioni, interviste, archivi eccetera; successive elaborazioni statistico-matematiche possono produrre algoritmi, equazioni e funzioni in grado di coglierne gli aspetti fondamentali, con vari obiettivi: la spiegazione (perché), la previsione (che cosa accadrà), la simulazione (che cosa accadrebbe se...), l'ottimizzazione (come operare per ottenere, ad esempio, il massimo beneficio, o il minimo costo). L'accuratezza con cui si raccolgono e si selezionano i dati si riflette sull'attendibilità dei risultati; talvolta conviene iniziare a lavorare con semplici esempi, per capire la parte sostanziale della realtà e solo in seguito passare ad applicazioni via via più complesse, in grado di tener conto di aspetti meno rilevanti.

In fase applicativa, è comunque il caso di tener conto (con i dovuti vincoli etici) della regola aurea del Chitarrella: vale più una sbirciata di cento pensate.

Capitolo 2

L'Ottimizzazione Libera

A cura di Gianfranco Gambarelli

Ci limitiamo a un cenno ai metodi di Ottimizzazione libera noti in Analisi Matematica, rinviando, per eventuali approfondimenti, a testi più specialistici, come (Simon & Blume, 1994).

2.1 Qualche richiamo preliminare

Definizioni relative a insiemi di numeri reali.

Utilizzeremo come esempio di riferimento l'intervallo $A = (5, 9]$.

x è un *maggiorante* di un insieme $A =_{\text{def}}$ per ogni $a \in A$ è $x \geq a$.
Es.: $x = 9$ è un *maggiorante* di A, ma anche 9,27 e 11 sono maggioranti di A.

x è un *minorante* di un insieme $A =_{\text{def}}$ per ogni $a \in A$ è $x \leq a$.
Es.: $x = 5$ è un *minorante* di A così come -12.

Un insieme è *superiormente limitato* $=_{\text{def}}$ ha almeno un maggiorante (quindi, infiniti); è *inferiormente limitato* $=_{\text{def}}$ ha almeno un minorante (quindi, infiniti).

Un insieme di numeri reali è *limitato* $=_{\text{def}}$ è sia superiormente che inferiormente limitato.
Es.: A è limitato.

M è il *massimo* ("max") elemento dell'insieme $=_{\text{def}}$ M è quel maggiorante (se esiste) che $\in$ all'insieme.
Nel nostro esempio: $M = 9$.

m è il *minimo* ("min") elemento dell'insieme $=_{\text{def}}$ m è quel minorante (se esiste) che $\in$ all'insieme.
Nel nostro esempio: A non ha minimo.

S è l'*estremo superiore* ("Sup") di un insieme $=_{\text{def}}$ S è il minimo dei suoi maggioranti, se l'insieme è superiormente limitato; altrimenti è $+\infty$.

s è l'*estremo inferiore* ("Inf") di un insieme $=_{\text{def}}$ s è il massimo dei suoi minoranti, se l'insieme è inferiormente limitato; altrimenti è $-\infty$.
Nel nostro esempio: $Sup\ A = 9$, $Inf\ A = 5$.

Definizioni relative a funzioni reali di una o più variabili reali.

Indicheremo con $\underline{x}$ il vettore $(x_1, \ldots, x_n)$.

Nel corso di questo capitolo utilizzeremo il seguente esempio (fig. 2.1, pag. 15):

$$\underline{x} = (x_1, x_2); \quad f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}.$$

Il *dominio* di una funzione è l'insieme dei punti corrispondenti alle variabili indipendenti, per i quali la funzione è definita; il *codominio* è l'insieme di arrivo della funzione; l'*immagine di una funzione* è il sottoinsieme del codominio costituito dai valori assunti dalla funzione.
Nel nostro esempio il codominio è $\mathbb{R}$ e l'immagine è l'intervallo $[0, 1]$.

Il *valore massimo* (se esiste) di una funzione è il massimo della sua immagine; analogamente per il *valore minimo*, l'*estremo superiore* e l'*estremo inferiore*.

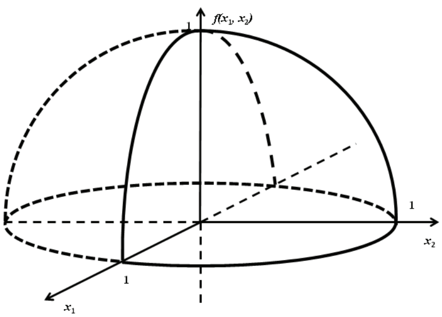

Figura 2.1: Illustrazione funzione $\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$.

Es.: Il dominio della nostra funzione è l'insieme dei punti del piano (x_1, x_2) per cui $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$, cioè il cerchio con centro nell'origine e raggio 1. L'immagine è l'intervallo $[0, 1]$.
Precisiamo, infatti, che in questo contesto consideriamo le funzioni sotto radice con il solo segno positivo.

$$\min f(\underline{x}) = \operatorname{Inf} f(\underline{x}) = 0; \max f(\underline{x}) = \operatorname{Sup} f(\underline{x}) = 1.$$

Altre definizioni.

Sia $\underline{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ un punto del dominio di $f(\underline{x})$. Si dice che $\underline{x}^*$ è un *punto di massimo assoluto* per $f(\underline{x}) =_{\text{def}} f(\underline{x}^*)$ è il valore massimo di $f(\underline{x})$. Analogamente per un *punto di minimo assoluto*.

$\underline{x}^*$ è un *punto di massimo di frontiera* per $f(\underline{x}) =_{\text{def}} \underline{x}^*$ è un *punto di massimo assoluto* per $f(\underline{x})$ ed è un punto di frontiera per il dominio di $f(\underline{x})$. Analogamente per un *punto di minimo di frontiera*.

$\underline{x}^*$ è un *punto di massimo relativo* per $f(\underline{x}) =_{\text{def}}$ esiste un intorno di x^* in tutti i punti del quale, ove è definita, $f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}^*)$.

$\underline{x}^*$ è un *punto di minimo relativo* per $f(\underline{x}) =_{\text{def}}$ esiste un intorno di x^* in tutti i punti del quale, ove è definita, $f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}^*)$.

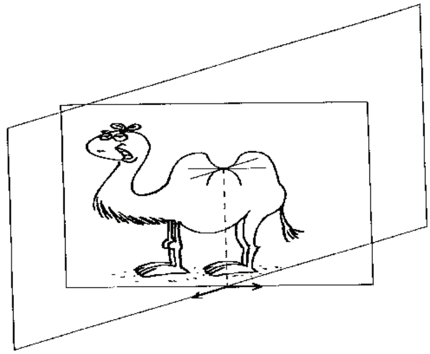

Figura 2.2: Illustrazione di punto di sella.

$\underline{x}^*$ è un *punto di sella* per $f(\underline{x}) =_{\text{def}}$ esiste un intorno di x^* tale che lungo una direzione il punto sia di massimo relativo e lungo un'altra direzione sia di minimo relativo (fig. 2.2, pag. 16).
Es.: La funzione del nostro esempio ha un unico punto di massimo assoluto nell'origine e ha infiniti punti di minimo di frontiera sulla circonferenza con centro nell'origine e raggio 1 (fig. 2.1, pag. 15).

Definizioni relative a matrici quadrate.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Il determinante delle matrici quadrate di ordine $n \leq 3$ vale:

- $n = 1 \to \det A = a_{11}$;
- $n = 2 \to \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;
- $n = 3 \to \det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{33}a_{21}a_{12} + a_{11}a_{32}a_{23})$.

Per $n > 3$ rinviamo a testi specialistici

Si chiama *matrice hessiana* $(\mathcal{H})$ di $f(\underline{x})$ la matrice delle sue derivate parziali seconde, tale cioè che i suoi elementi a_{ij} valgono $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$.

Si chiama *Hessiano* e si indica con H il determinante della matrice hessiana di $f(\underline{x})$.

2.2 Ricerca di massimi e minimi liberi

Ci limitiamo a descrivere il metodo analitico per la ricerca dei punti interni al dominio, di massimo e minimo relativo e assoluto, nelle funzioni più regolari; per i casi qui non trattati rinviamo a testi specialistici.

Si calcolano le derivate parziali e si individua l'insieme dei punti interni al dominio nei quali tali derivate sono o nulle ("punti critici"), o non definite. Tutti gli altri punti vanno esclusi.

Dei punti restanti si considerano i soli nei quali tutte le derivate parziali seconde sono definite; per gli altri punti si ricorre a metodi specifici. La regola, per $n < 3$, è la seguente.

$n = 1$
$H < 0 \rightarrow$ punto di massimo
$H > 0 \rightarrow$ punto di minimo
$H = 0 \rightarrow$ bisogna ricorrere ad altri metodi.

$n = 2$
$H < 0 \rightarrow$ né massimo, né minimo

$$H > 0 \rightarrow \begin{cases} \partial^2 f/\partial x_1^2 < 0 & \rightarrow \text{ punto di massimo} \\ \partial^2 f/\partial x_1^2 > 0 & \rightarrow \text{ punto di minimo} \end{cases}$$

$H = 0 \rightarrow$ bisogna ricorrere ad altri metodi.

Nei casi restanti bisogna ricorrere ad altri metodi, che verranno illustrati in seguito.

Per $n > 2$ rinviamo al Capitolo 6 e a testi specialistici, come ad esempio (Simon & Blume, 1994).

Per illustrare come affrontare i casi non risolti qui sopra, iniziamo dal seguente esempio.
Sia $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$. La funzione è definita $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Calcoliamo le derivate parziali:

$\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1 = 2x_1 x_2^2$
$\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2 = 2x_1^2 x_2$
definite $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Poiché entrambe le derivate parziali sono definite su tutto $\mathbb{R}^2$, tutti e soli gli eventuali punti di massimo o minimo relativo sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} \partial f(x_1, x_2)/\partial x_1 = 0 \\ \partial f(x_1, x_2)/\partial x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 x_2^2 = 0 \\ 2x_1^2 x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \forall x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ \forall x_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Tutti e soli gli infiniti punti $(0, h)$ e $(k, 0)$, con h e k numeri reali, potrebbero essere punti critici; appartengono al dominio e sono punti interni. Possiamo quindi utilizzare il metodo della matrice hessiana $(\mathcal{H})$ per determinarne la natura.

$\partial^2 f(x_1, x_2)/\partial x_1^2 = 2x_2^2$
$\partial^2 f(x_1, x_2)/\partial x_2^2 = 2x_1^2$
$\partial^2 f(x_1, x_2)/\partial x_1 \partial x_2 = \partial^2 f(x_1, x_2)/\partial x_2 \partial x_1 = 4x_1 x_2$

$$\mathcal{H}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_2^2 & 4x_1 x_2 \\ 4x_1 x_2 & 2x_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}(0, h) = \begin{bmatrix} 2h^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathcal{H}(k, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2k^2 \end{bmatrix}$$

$H(0, h) = 0, \ H(k, 0) = 0.$