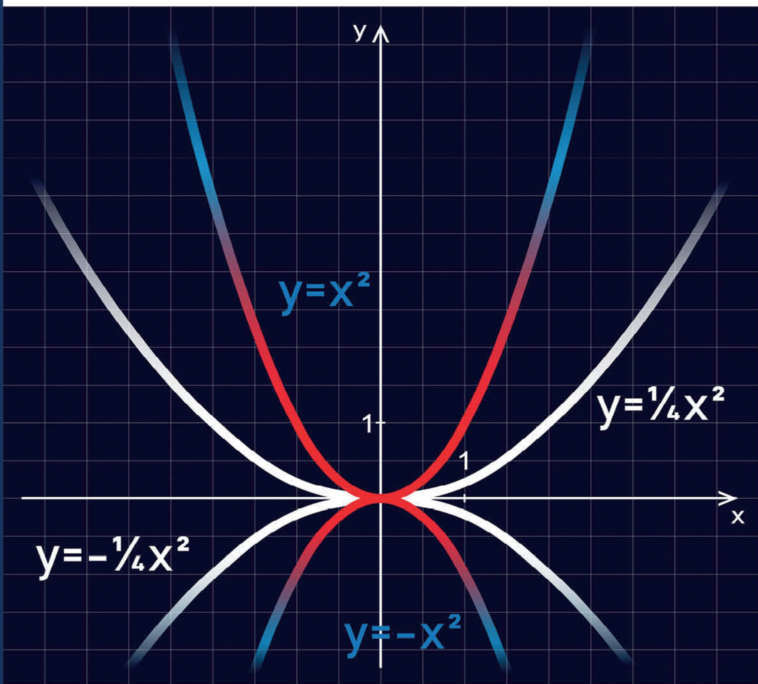
Claudio Mattalia

Corso di Matematica

Matematica Generale



Giappichelli

Prefazione

Questo volume è il risultato di una lunga esperienza didattica maturata presso la Scuola di Management ed Economia dell'Università di Torino. Il testo affronta gli argomenti tradizionali di un primo corso universitario dedicato alla matematica applicata in campo economico ed aziendale: dopo un Capitolo in cui vengono illustrate le nozioni di base della teoria degli insiemi e della logica, sono introdotti i concetti fondamentali riguardanti le funzioni reali di una variabile reale, i limiti e la continuità, il calcolo differenziale e il calcolo integrale per tali funzioni. Seguono due Capitoli dedicati, rispettivamente, all'algebra lineare e alle funzioni reali di più variabili reali, con alcuni approfondimenti utili anche per corsi più avanzati. Chiude il volume un'Appendice che contiene una presentazione dettagliata dell'argomento costituito dalle disequazioni, utilizzate ampiamente nel testo.

In ogni Capitolo gli argomenti vengono presentati innanzitutto a livello teorico, cercando di privilegiare la semplicità e la chiarezza espositiva, senza però rinunciare al rigore richiesto dalla materia in oggetto. Ciascun argomento è poi illustrato attraverso una ricca serie di esempi, risolti in modo dettagliato, cercando innanzitutto di mettere in evidenza il ragionamento che (al di là dei singoli calcoli, pure importanti) è alla base della risoluzione di un certo problema. Al termine di ogni Capitolo, inoltre, sono raccolti numerosi esercizi da svolgere, dei quali è riportata la soluzione.

Desidero ringraziare i miei colleghi del Dipartimento di Scienze Economico-Sociali e Matematico-Statistiche dell'Università di Torino con i quali, nel corso degli anni, ho condiviso i corsi dai quali è nato il materiale oggetto di questo testo, e i numerosi studenti che hanno utilizzato ed apprezzato, in precedenti versioni, tale materiale. Un ringraziamento particolare va anche all'Editore, per l'incoraggiamento e il sostegno nella stesura del testo. Resta ovviamente inteso che gli eventuali errori ancora presenti sono di mia esclusiva responsabilità.

Torino, luglio 2023 — Claudio Mattalia

Capitolo 1

Insiemi e logica

1.1. Insiemi: nozioni di base

Il concetto di insieme viene di solito assunto come noto e utilizzato come sinonimo di collezione, famiglia, classe di elementi individuati in base ad una determinata specificazione. Gli insiemi vengono indicati con lettere maiuscole (ad es. A, B, X, Y), mentre i loro elementi vengono indicati con lettere minuscole (ad es. a, b, x, y). Un primo modo per rappresentare un insieme consiste nell'elencare i suoi elementi (racchiudendoli tra parentesi graffe), un secondo modo consiste invece nell'indicare una proprietà che li caratterizza, mentre un terzo modo consiste nell'utilizzare i diagrammi di Venn, nei quali gli elementi dell'insieme sono rappresentati come punti del piano.

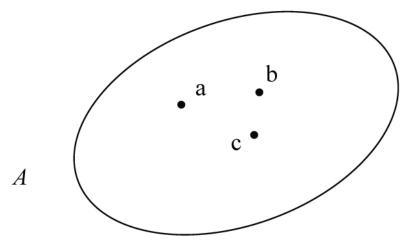
Esempio 1.1 *L'insieme A costituito dalle prime 3 lettere dell'alfabeto può essere rappresentato elencando i suoi elementi:*

$$A = \{a, b, c\}$$

oppure indicando una loro proprietà caratteristica:

$$A = \{\textit{prime } 3 \textit{ lettere dell'alfabeto}\}$$

oppure con un diagramma di Venn:



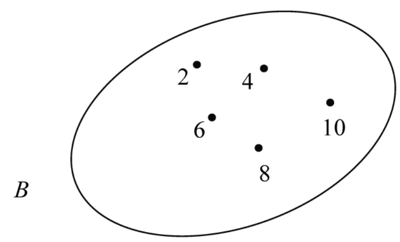
Esempio 1.2 *L'insieme B costituito dai primi 5 numeri positivi pari può essere rappresentato elencando i suoi elementi:*

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

oppure indicando una loro proprietà caratteristica:

$$B = \{\textit{primi } 5 \textit{ numeri positivi pari}\}$$

oppure con un diagramma di Venn:



Un simbolo spesso utilizzato è quello di $\in$ che indica "appartenenza", mentre il simbolo $\notin$ indica "non appartenenza", ed un insieme particolare è l'insieme vuoto, cioè privo di elementi, che si indica con il simbolo $\emptyset$.

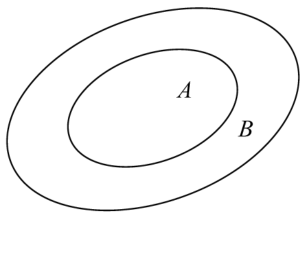
Esempio 1.3 *Dato l'insieme:*

$$X = \{0, 1, 2\}$$

si ha che $1 \in X$ (cioè 1 è un elemento dell'insieme), mentre $4 \notin X$ (cioè 4 non è un elemento dell'insieme).

Dato l'insieme vuoto, poi, si ha che per qualsiasi elemento a risulta $a \notin \emptyset$ (cioè a non è un elemento dell'insieme vuoto).

Due insiemi sono uguali se hanno gli stessi elementi, e in questo caso non è rilevante l'ordine con il quale essi vengono elencati. Dati due insiemi A e B, poi, si dice che A è sottoinsieme di B (oppure che A è contenuto in B), e si scrive $A \subseteq B$, se ogni elemento di A è anche elemento di B. Graficamente si ha:



Il simbolo $\subseteq$ indica "inclusione", e non esclude che gli insiemi A e B coincidano, mentre se si vuole escludere questa possibilità si può usare il simbolo $\subset$ che indica "inclusione stretta". Si dice allora che A è sottoinsieme proprio di B (oppure che A è strettamente contenuto in B), e si scrive $A \subset B$, se ogni elemento di A è anche elemento di B, ma esiste almeno un elemento di B che non è elemento di A. In particolare, l'insieme $\emptyset$ è strettamente contenuto in ogni altro insieme.

Esempio 1.4 *Dati gli insiemi:*

$$A = \{0, 1, 2\} \qquad B = \{1, 2, 0\}$$

si ha $A \subseteq B$ e anche $B \subseteq A$, cioè A è un sottoinsieme di B e B è un sottoinsieme di A, per cui in realtà i due insiemi sono uguali, cioè $A = B$.

Dati invece gli insiemi:

$$A = \{0, 1\} \qquad B = \{0, 1, 2\}$$

si ha $A \subset B$, cioè A è un sottoinsieme (proprio) di B.

Ogni insieme A contiene sempre se stesso ($A \subseteq A$) e l'insieme vuoto ($\emptyset \subset A$), che vengono detti sottoinsiemi impropri di A.

Dato un insieme A, l'insieme costituito da tutti i suoi sottoinsiemi (propri e impropri) prende il nome di *insieme delle parti* e viene indicato con $\mathcal{P}(A)$. Se A è formato da n elementi, il suo insieme delle parti è costituito da 2^n elementi.

Esempio 1.5 *Dato l'insieme:*

$$A = \{1, 2, 3\}$$

determinare il suo insieme delle parti.

In questo caso l'insieme delle parti di A è dato da:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

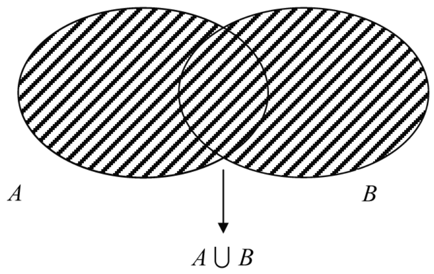
che risulta costituito da $2^3 = 8$ elementi (dove $n = 3$ è il numero di elementi di A).

1.2. Operazioni tra insiemi

Tra insiemi è possibile definire alcune operazioni. In particolare, dati due insiemi A e B, la loro *unione* è l'insieme, indicato con $A \cup B$, costituito da tutti gli elementi che appartengono ad A o a B (o ad entrambi), cioè:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

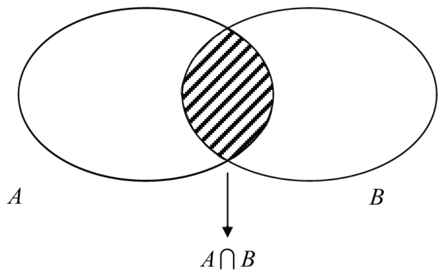
(dove il simbolo : si legge “tale che”) e graficamente:



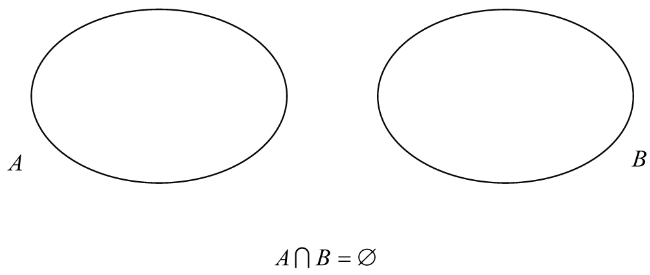
mentre la loro *intersezione* è l’insieme, indicato con $A \cap B$, costituito da tutti gli elementi che appartengono sia ad A sia a B, cioè:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

e graficamente:



Se due insiemi hanno intersezione vuota (cioè $A \cap B = \emptyset$) si dicono disgiunti, e graficamente:



Esempio 1.6 *Dati gli insiemi:*

$$A = \{0, 1, 2\} \qquad\qquad B = \{1, 2, 3\}$$

individuare la loro unione e la loro intersezione.

In questo caso l'unione dei due insiemi è data da:

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$$

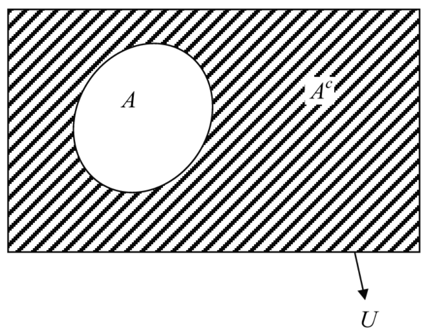
mentre la loro intersezione è data da:

$$A \cap B = \{1, 2\}$$

Dato un insieme U (detto "insieme universo") e un sottoinsieme A di U, poi, il *complementare* di A rispetto ad U, indicato con A_U^c (oppure con A^c o con $\overline{A}$) è l'insieme formato dagli elementi di U che non appartengono ad A, cioè:

$$A^c = \{x : x \in U \text{ e } x \notin A\}$$

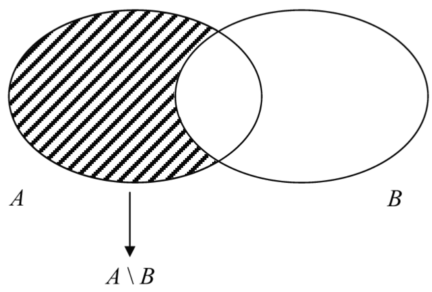
e graficamente:



mentre dati due insiemi A e B l'insieme *differenza* di A e B, indicato con $A \setminus B$, è l'insieme costituito dagli elementi che appartengono ad A ma non a B, cioè:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

e graficamente:



Si ha allora che il complementare di A rispetto ad U può anche essere visto come differenza tra U ed A, cioè $A^c_U = U \setminus A$.

Esempio 1.7 *Dati gli insiemi:*

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad A = \{1, 4\} \qquad B = \{0, 1, 2\} \qquad C = \{1, 2, 3\}$$

individuare il complementare di A rispetto ad U e l'insieme differenza di B e C.

In questo caso il complementare di A rispetto ad U è:

$$A^c = \{2, 3, 5, 6\} = U \setminus A$$

mentre l'insieme differenza di B e C è:

$$B \setminus C = \{0\}$$

cioè l'insieme costituito dal solo elemento 0 (che non va confuso con l'insieme vuoto $\emptyset$).

Le operazioni di unione, intersezione e complementare godono di una serie di proprietà, in particolare:

(i) proprietà di idempotenza:

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

(ii) proprietà commutativa:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

(iii) proprietà associativa:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(iv) proprietà distributiva:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

(v) si ha:

$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

(vi) leggi di De Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Queste ultime, in particolare, indicano che il complementare dell'unione (intersezione) di due insiemi è uguale all'intersezione (unione) dei complementari degli insiemi stessi, e hanno un equivalente di particolare rilievo dal punto di vista logico (come si vedrà nella Sezione 1.9).

1.3. Prodotto cartesiano

Dati due insiemi del tipo $A = \{a, b\}$ e $B = \{b, a\}$, come visto in precedenza essi coincidono (cioè $A = B$), in quanto possiedono gli stessi elementi, indipendentemente dall'ordine con il quale questi vengono indicati. In alcuni casi occorre invece considerare delle coppie ordinate, nelle quali cioè è rilevante l'ordine con il quale si scrivono gli elementi. Dati due insiemi A e B (non necessariamente distinti), si chiama *coppia ordinata* un insieme (a, b) costituito prendendo un elemento $a \in A$ e un elemento $b \in B$ nell'ordine indicato. L'insieme di tutte queste coppie ordinate si chiama poi *prodotto cartesiano* di A e B e si indica con $A \times B$ (che si legge "A cartesiano B"), cioè:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

e se $A \neq B$ allora risulta $A \times B \neq B \times A$, mentre se $A = B$ si scrive $A \times A = A^2$.

Esempio 1.8 *Dati gli insiemi:*

$$A = \{0, 1, 2\} \qquad B = \{-1, 1\}$$

individuare i prodotti cartesiani $A \times B$ e $B \times A$.

In questo caso il prodotto cartesiano $A \times B$ è dato da:

$$A \times B = \{(0, -1), (0, 1), (1, -1), (1, 1), (2, -1), (2, 1)\}$$

mentre il prodotto cartesiano $B \times A$ è dato da:

$$B \times A = \{(-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$$

e risulta $A \times B \neq B \times A$.

Più in generale, dati n insiemi $A_1, A_2, ..., A_n$ (non necessariamente distinti) si chiama *n-pla (ennupla) ordinata* un insieme $(a_1, a_2, ..., a_n)$ costituito prendendo un elemento $a_1 \in A_1$, un elemento $a_2 \in A_2$, ..., un elemento $a_n \in A_n$ nell'ordine indicato. L'insieme di tutte queste n-ple ordinate si chiama poi *prodotto cartesiano* di $A_1, A_2, ..., A_n$ e si indica con $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, cioè:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A_i \qquad i = 1, 2, ..., n\}$$

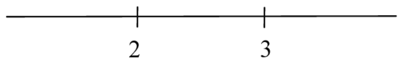
e se $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$ si scrive $A \times A \times ... \times A = A^n$.

1.4. Gli insiemi numerici

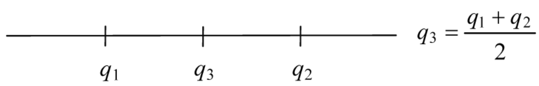
Insiemi di particolare importanza sono quelli numerici, più precisamente:

1. l'insieme dei *numeri naturali* $\mathbb{N}$:
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$
2. l'insieme dei *numeri interi relativi* $\mathbb{Z}$:
$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$$
3. l'insieme dei *numeri razionali* $\mathbb{Q}$:
$$\mathbb{Q} = \left\{ \pm \frac{m}{n} \text{ con } m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\}$$

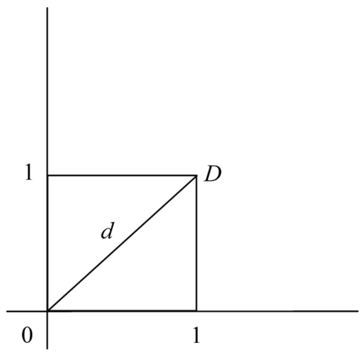
Gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono detti *discreti*, in quanto non sempre tra 2 elementi di $\mathbb{N}$ (o di $\mathbb{Z}$) è compreso un altro elemento di $\mathbb{N}$ (o di $\mathbb{Z}$), ad esempio si ha:



e tra 2 e 3 non vi è alcun elemento appartenente a $\mathbb{N}$ (o a $\mathbb{Z}$). Considerando invece $\mathbb{Q}$, è sempre vero che dati 2 numeri $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ esiste un terzo numero q_3 (con $q_1 < q_3 < q_2$) appartenente a $\mathbb{Q}$ (ad esempio la media aritmetica tra q_1 e q_2):



Questa proprietà (per cui tra 2 razionali esiste sempre un altro razionale) si esprime dicendo che $\mathbb{Q}$ è *denso*. Tuttavia, $\mathbb{Q}$ è ancora *discontinuo*, cioè tra 2 razionali può trovarsi un numero non razionale. Si dimostra ad esempio che il numero indicato con $\sqrt{2}$ (cioè il numero il cui quadrato è uguale a 2) non appartiene all'insieme $\mathbb{Q}$. A questo proposito si considera innanzitutto la seguente costruzione geometrica:



cioè un quadrato di lato unitario, e applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo con vertici nei punti $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ e $D = (1,1)$ si ha:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$$

per cui la lunghezza della diagonale del quadrato considerato è uguale al numero $\sqrt{2}$. Vale a questo punto il seguente risultato:

Teorema 1 *Non esiste alcun numero razionale* $\pm\frac{m}{n}$ *il cui quadrato è uguale a* 2.

Dimostrazione Nella dimostrazione si sfrutta il fatto che un numero pari può sempre essere scritto nella forma:

$$m = 2k \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}$$

mentre un numero dispari può sempre essere scritto nella forma:

$$n = 2k + 1 \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}$$

Da ciò risulta anche che il quadrato di un numero pari può essere scritto come:

$$m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2z$$

che è sicuramente, a sua volta, un numero pari, mentre il quadrato di un numero dispari può essere scritto come:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2) + 2(2k) + 1 = \\ &= 2z + 2t + 1 = 2(z+t) + 1 = 2r + 1 \end{aligned}$$

che è sicuramente, a sua volta, un numero dispari.

Per dimostrare il Teorema si procede per assurdo, cioè si nega la tesi e si assume che esista un numero razionale $\pm\frac{m}{n}$ il cui quadrato è 2:

$$\left(\pm\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$$

A questo punto, poiché $2n^2$ è sicuramente un numero pari, anche m^2 è pari, e quindi anche m è pari (perché, come visto sopra, il quadrato di un numero dispari è dispari), per cui si può scrivere:

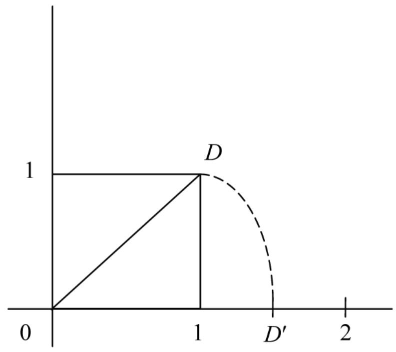
$$m = 2k$$

e poi:

$$m^2 = 2n^2 \Rightarrow (2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2$$

dove $2k^2$ è sicuramente un numero pari, per cui anche n^2 è pari, e quindi anche n è pari. Questo però è un assurdo, perché in un numero razionale $\pm\frac{m}{n}$ i numeri m e n sono sempre primi tra loro, cioè non hanno divisori in comune (e se non lo fossero si potrebbero comunque semplificare facendo sì che diventino primi tra loro), mentre in questo caso ciò non accade (in quanto essendo m e n entrambi numeri pari hanno almeno il divisore 2 in comune). In conclusione, è sbagliato negare la tesi, cioè la tesi è vera, e quindi non esiste alcun numero razionale $\pm\frac{m}{n}$ il cui quadrato è uguale a 2.

Graficamente, con riferimento all'esempio appena considerato si ha una situazione di questo tipo:

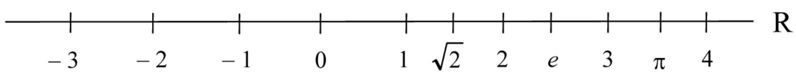


e il punto D' sulla retta corrisponde al numero $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, quindi l'insieme $\mathbb{Q}$ lascia sulla retta dei "buchi". Per "riempire" tali buchi occorre allora introdurre un ulteriore insieme numerico, l'insieme dei *numeri reali* $\mathbb{R}$.

I numeri reali sono individuati da un qualsiasi allineamento decimale, mentre i numeri razionali ammettono una rappresentazione decimale limitata o illimitata periodica. Di conseguenza, gli allineamenti decimali illimitati non periodici corrispondono ai numeri irrazionali, il cui insieme viene indicato (attraverso la differenza insiemistica) con $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si ha ad esempio:

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \qquad e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \qquad \pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

L'insieme $\mathbb{R}$ "riempie" tutti i buchi della retta, perciò è un insieme *continuo* (cioè tra 2 numeri reali vi sono sempre tutti numeri reali). I numeri reali sono quindi in corrispondenza biunivoca con i punti della retta (cioè ad ogni numero reale corrisponde un punto della retta e viceversa), per cui si parla anche di *retta reale*:



Gli insiemi numerici considerati stanno tra di loro nella seguente relazione:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

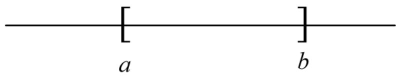
dove ciascun insieme è un sottoinsieme proprio di quello successivo.

1.5. Insiemi di numeri reali: gli intervalli

Un rilievo particolare spetta ad alcuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, che vengono detti *intervalli.* A questo proposito, dati due numeri reali a, b con $a < b$ si introducono i seguenti insiemi:

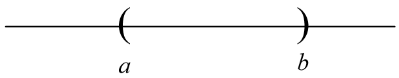
(i) intervallo chiuso e limitato di estremi a e b:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$



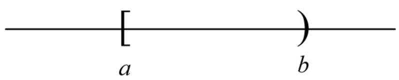
(ii) intervallo aperto e limitato di estremi a e b:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$



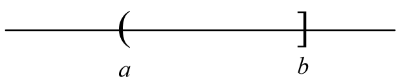
(iii) intervallo semichiuso o semiaperto (chiuso a sinistra e aperto a destra) e limitato di estremi a e b:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$



(iv) intervallo semiaperto o semichiuso (aperto a sinistra e chiuso a destra) e limitato di estremi a e b:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$



nei quali la specificazione "chiuso" e "aperto" deriva dal fatto che gli estremi, rispettivamente, appartengono o non appartengono all'insieme in esame, mentre la specificazione "limitato" deriva dal fatto che gli estremi costituiscono un confine inferiore e superiore per gli elementi dell'insieme stesso. Tutti questi intervalli hanno un segmento di retta come immagine geometrica.

A questo punto si possono introdurre i simboli $+\infty$ (più infinito) e $-\infty$ (meno infinito), i quali sono tali che:

$$-\infty < x < +\infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

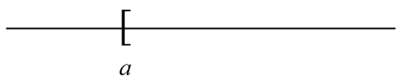
(dove il simbolo $\forall$ si legge "per ogni"), e si definisce *sistema ampliato di numeri reali* l'insieme:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Si possono così introdurre anche gli intervalli illimitati (la cui immagine geometrica è una semiretta), che sono insiemi definiti nel seguente modo:

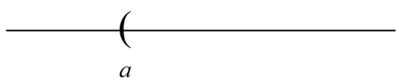
(i) intervallo chiuso e illimitato a destra:

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$



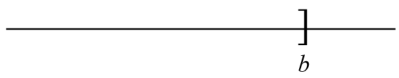
(ii) intervallo aperto e illimitato a destra:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$



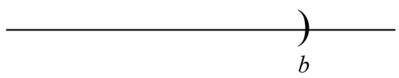
(iii) intervallo chiuso e illimitato a sinistra:

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$



(iv) intervallo aperto e illimitato a sinistra:

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$



L'insieme dei numeri reali, la cui immagine geometrica è la retta, infine, può essere indicato con:

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

Nel sistema ampliato dei numeri reali $\mathbb{R}^*$ si introduce una parziale aritmetizzazione dei simboli $+\infty$ e $-\infty$. Valgono in particolare le seguenti regole:

a) per la somma:

$$+\infty + a = +\infty \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$-\infty + a = -\infty \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$+\infty + \infty = +\infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

mentre non è definita la forma:

$$+\infty - \infty =?$$

b) per il prodotto:

$$(+\infty) \cdot a = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$(-\infty) \cdot a = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$$

$$(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$$

mentre non è definita la forma:

$$0 \cdot (\pm\infty) =?$$

c) per il reciproco:

$$\frac{1}{0} = \infty$$

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

d) per il rapporto:

$$\frac{a}{0} = a \cdot \frac{1}{0} = a \cdot \infty = \infty \qquad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\frac{a}{\infty} = a \cdot \frac{1}{\infty} = a \cdot 0 = 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\frac{\infty}{0} = \infty \cdot \frac{1}{0} = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\frac{0}{\infty} = 0 \cdot \frac{1}{\infty} = 0 \cdot 0 = 0$$

mentre non sono definite le forme:

$$\frac{0}{0} = ? \qquad \frac{\infty}{\infty} = ?$$

e) per l'esponenziale:

$$a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$a^{-\infty} = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$$

$$(+\infty)^{-\infty} = 0$$

mentre non sono definite le forme:

$$1^{\infty} = ? \qquad 0^0 = ? \qquad \infty^0 = ?$$

Tutte queste regole verranno riprese nel Capitolo dedicato allo studio dei limiti.

1.6. Massimo e minimo, estremo superiore e inferiore

Con riferimento agli insiemi di numeri reali si possono introdurre le nozioni di massimo e minimo. Vale la seguente definizione:

Definizione 1 *Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto, si dice massimo di A (e si scrive $M = \max A$) l'elemento $M \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$(i)\ M \in A$$
$$(ii)\ M \geq a \qquad \forall a \in A$$

Il massimo di un insieme è quindi un elemento che appartiene all'insieme (condizione (i)) e che risulta maggiore (o uguale) di tutti gli elementi dell'insieme stesso (condizione (ii)), cioè è un *maggiorante* che appartiene all'insieme.

Vale poi anche la seguente definizione:

Definizione 2 *Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto, si dice minimo di A (e si scrive $m = \min A$) l'elemento $m \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$(i)\ m \in A$$
$$(ii)\ m \leq a \qquad \forall a \in A$$

Il minimo di un insieme è quindi un elemento che appartiene all'insieme (condizione (i)) e che risulta minore (o uguale) di tutti gli elementi dell'insieme stesso (condizione (ii)), cioè è un *minorante* che appartiene all'insieme.

Esempio 1.9 *Dati gli insiemi (intervalli) di numeri reali:*

$$A = [-1, 3] \qquad B = (-1, 3)$$

individuare (se esistono) il massimo e il minimo.

Per l'insieme A il massimo e il minimo sono, rispettivamente:

$$\max A = 3 \qquad \min A = -1$$

in quanto essi rispettano le condizioni (i) e (ii) delle definizioni. Per l'insieme B, invece, il massimo e il minimo non esistono, in quanto i valori $x = -1$ e $x = 3$ soddisfano la condizione (ii) delle definizioni ma non la condizione (i) (poiché non appartengono all'insieme B).

Poiché massimo e minimo non esistono sempre, è possibile introdurre i concetti di estremo superiore ed estremo inferiore (che invece esistono sempre). Innanzitutto, un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice limitato superiormente se esiste un numero h maggiore (o uguale) di tutti gli elementi di A, cioè:

$$\exists h \in \mathbb{R} : h \geq a \qquad \forall a \in A$$

(dove il simbolo $\exists$ si legge "esiste"), mentre si dice limitato inferiormente se esiste un numero k minore (o uguale) di tutti gli elementi di A, cioè:

$$\exists k \in \mathbb{R} : k \leq a \qquad \forall a \in A$$

e si dice limitato se è contemporaneamente limitato superiormente e inferiormente.

Esempio 1.10 *L'insieme:*

$$A = [-1, 3]$$

è limitato superiormente e inferiormente, quindi è limitato, mentre l'insieme:

$$B = (-\infty, 3)$$

è limitato superiormente ma non inferiormente, e l'insieme:

$$C = [1, +\infty)$$

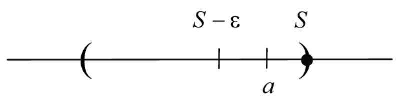
è limitato inferiormente ma non superiormente.

Vale a questo punto la seguente definizione:

Definizione 3 *Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente, si dice estremo superiore di A (e si scrive $S = \sup A$) l'elemento $S \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$(i)\ S \geq a \qquad \forall a \in A$$
$$(ii)\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : S - \varepsilon < a$$

L'estremo superiore di un insieme è quindi un maggiorante (condizione (i)), ed è anche il più piccolo dei maggioranti (condizione (ii)). Graficamente si ha una situazione di questo tipo:

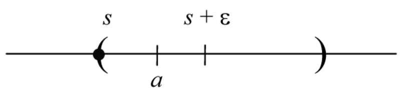


Vale poi anche la seguente definizione:

Definizione 4 *Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente, si dice estremo inferiore di A (e si scrive $s = \inf A$) l'elemento $s \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$(i)\ s \leq a \qquad \forall a \in A$$
$$(ii)\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : s + \varepsilon > a$$

L'estremo inferiore di un insieme è quindi un minorante (condizione (i)), ed è anche il più grande dei minoranti (condizione (ii)). Graficamente si ha una situazione di questo tipo:



In queste definizioni non si richiede che $S \in A$ ($s \in A$), ed è proprio questa condizione che diversifica il concetto di estremo superiore (inferiore) da quello di massimo (minimo). In particolare, se $S \in A$ ($s \in A$), allora è il massimo (minimo) di A ed anche l'estremo superiore (inferiore) di A, mentre se $S \notin A$ ($s \notin A$) allora è l'estremo superiore (inferiore) di A, mentre il massimo (minimo) non esiste.

Esempio 1.11 *Dati gli insiemi:*

$$A = [-1, 3] \qquad\qquad B = (-1, 3)$$

individuare l'estremo superiore e l'estremo inferiore.

In questo caso per l'insieme A si ha:

$$\sup A = \max A = 3 \qquad\qquad \inf A = \min A = -1$$

in quanto $x = 3$ è il più piccolo dei maggioranti di A ed inoltre appartiene ad A (per cui è anche il massimo) e $x = -1$ è il più grande dei minoranti di A ed inoltre appartiene ad A (per cui è anche il minimo). Per l'insieme B si ha invece:

$$\sup B = 3 \qquad\qquad \inf B = -1$$

mentre massimo e minimo non esistono, in quanto $x = 3$ è il più piccolo dei maggioranti di B ma non appartiene a B, e $x = -1$ è il più grande dei minoranti di B ma non appartiene a B.

Nel caso di un insieme A che non risulta limitato superiormente si può porre:

$$\sup A = +\infty$$

e nel caso di un insieme A che non risulta limitato inferiormente si può porre:

$$\inf A = -\infty$$

1.7. Intorni e topologia

Accanto alla cosiddetta struttura algebrica dell'insieme dei numeri reali (basata sulle operazioni prima introdotte) è possibile poi considerare la struttura metrica e successivamente la struttura topologica. A questo proposito occorre innanzitutto tenere presente che, data una disequazione con valore assoluto del tipo:

$$|f(x)| \geq k \qquad\qquad \text{con } k > 0$$

essa corrisponde all'unione delle due disequazioni:

$$f(x) \leq -k \qquad\qquad \text{oppure} \qquad\qquad f(x) \geq k$$

mentre data una disequazione del tipo:

$$|f(x)| \leq k \qquad\qquad \text{con } k > 0$$

essa corrisponde alla doppia diseguaglianza:

$$-k \leq f(x) \leq k$$

Il punto di partenza per lo studio della struttura metrica dell'insieme $\mathbb{R}$ è la nozione di *distanza.* Vale a questo proposito la seguente definizione:

Definizione 5 *Dati $x, y \in \mathbb{R}$, si chiama distanza il valore assoluto (o modulo) della loro differenza:*

$$d(x, y) = |x - y|$$

Come conseguenza si ha quindi anche che:

$$|x| = |x - 0| = d(x, 0)$$

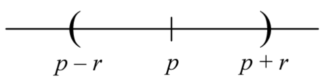
cioè il modulo di un numero reale rappresenta la sua distanza dall'origine.

Il punto di partenza per lo studio della struttura topologica dell'insieme $\mathbb{R}$, invece, è la nozione di *intorno* di un punto, che costituisce un particolare intervallo. Vale la seguente definizione:

Definizione 6 *Dato un punto $p \in \mathbb{R}$, si chiama intorno (completo) di centro p e raggio r (dove $r > 0$) l'insieme dei punti che distano da p meno di r:*

$$\begin{aligned} U_r(p) &= \{x \in \mathbb{R} : d(x,p) < r\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - p| < r\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -r < x - p < r\} = \{x \in \mathbb{R} : p - r < x < p + r\} = \\ &= (p - r, p + r) \end{aligned}$$

per cui l'intorno di un punto p con raggio r è l'intervallo aperto $(p - r, p + r)$:



In modo analogo si definiscono intorni sinistri e destri, che sono intervalli del tipo:

$$U_r^-(p) = (p - r, p] \qquad U_r^+(p) = [p, p + r)$$

cioè:

e anche intorni di $-\infty$ e di $+\infty$, che sono intervalli del tipo:

$$U(-\infty) = (-\infty, -M) \qquad U(+\infty) = (M, +\infty)$$

cioè:

Esempio 1.12 *L'intorno (completo) di centro* 3 *e raggio* 1 *è l'intervallo:*

$$U_1(3) = (3-1, 3+1) = (2, 4)$$

mentre l'intorno sinistro di centro 3 *e raggio* 1 *è l'intervallo:*

$$U_1^-(3) = (3-1, 3] = (2, 3]$$

e l'intorno destro di centro 3 *e raggio* 1 *è l'intervallo:*

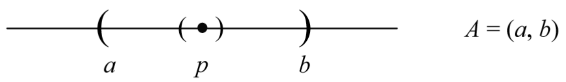
$$U_1^+(3) = [3, 3+1) = [3, 4)$$

Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si possono poi introdurre una serie di classificazioni con riferimento ai punti che appartengono (o non appartengono) ad A. Vale la seguente definizione:

Definizione 7 *Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, un punto $p \in \mathbb{R}$ si dice:*

(i) interno ad A se appartiene ad A ed esiste almeno un suo intorno tutto contenuto in A, cioè:

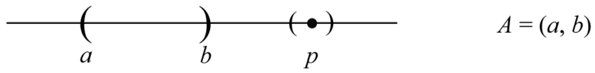
$$p \in A \qquad e \qquad \exists U_r(p) \subseteq A$$



L'insieme dei punti interni di A viene indicato con A^i.

(ii) esterno ad A se è interno al complementare di A, cioè se non appartiene ad A ed esiste almeno un suo intorno che non ha elementi in comune con A, cioè:

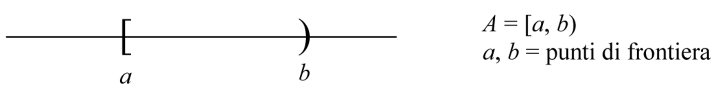
$$p \notin A \qquad e \qquad \exists U_r(p) : U_r(p) \cap A = \emptyset$$



L'insieme dei punti esterni di A viene indicato con A^e.

(iii) di frontiera per A se ogni suo intorno contiene sia punti di A sia punti del complementare di A (in questo caso il punto p può appartenere o meno ad A), cioè:

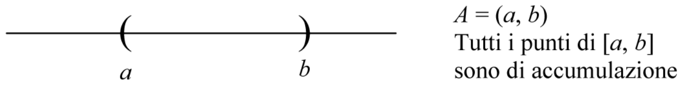
$$\forall U_r(p) : U_r(p) \cap A \neq \emptyset \quad e \quad U_r(p) \cap A^c \neq \emptyset$$



L'insieme dei punti di frontiera di A viene indicato con ∂A (detto anche frontiera o bordo di A).

(iv) di accumulazione per A se ogni suo intorno contiene punti di A (diversi dal punto p stesso), cioè:

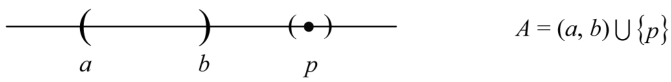
$$\forall U_r(p) : U_r(p) \cap A \setminus \{p\} \neq \emptyset$$



L'insieme dei punti di accumulazione di A viene indicato con A' (detto anche insieme derivato).

(v) isolato rispetto ad A se appartiene ad A ed esiste almeno un suo intorno al quale non appartengono punti di A (diversi da p stesso), cioè:

$$p \in A \qquad e \qquad \exists U_r(p) : U_r(p) \cap A \setminus \{p\} = \emptyset$$

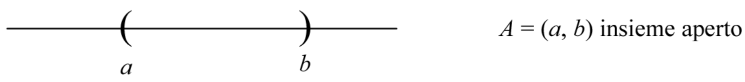


L'insieme dei punti isolati di A viene indicato con A^{is}.

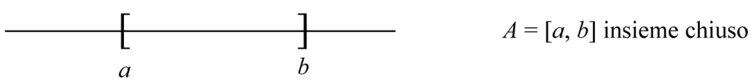
Si possono infine introdurre alcune classificazioni con riferimento agli insiemi, in relazione alle caratteristiche dei punti che li costituiscono. Vale la seguente definizione:

Definizione 8 *Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice:*

(i) aperto se tutti i suoi punti sono interni:



(ii) chiuso se il suo complementare è aperto (e anche se contiene tutti i suoi punti di accumulazione):



(iii) limitato se è contenuto in un opportuno intorno dell'origine: