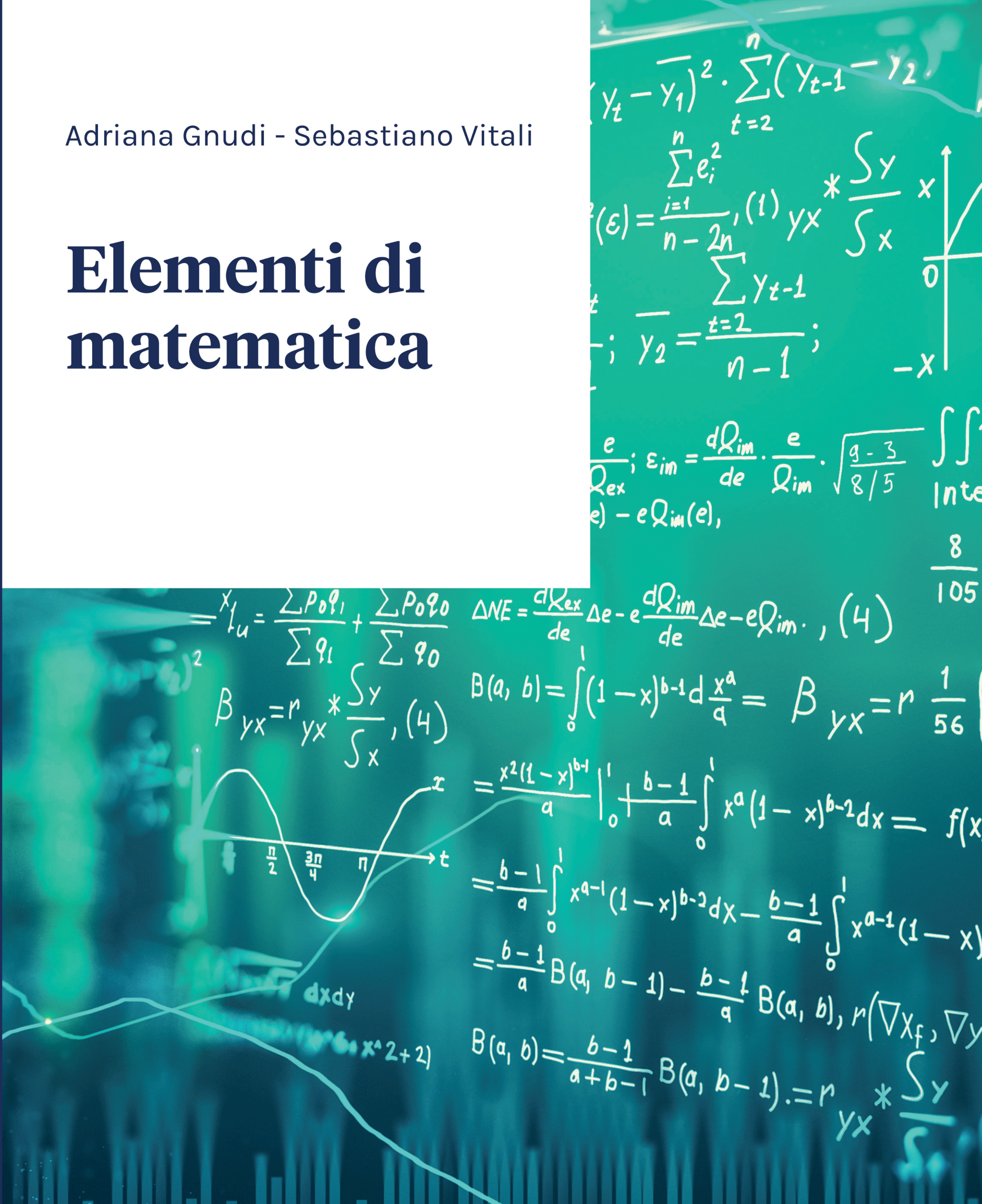
Adriana Gnudi - Sebastiano Vitali

Elementi di matematica



Giappichelli

Capitolo 1 – **L'insieme dei reali**

Problema: Un problema per iniziare
Un cliente deve scegliere fra due proposte per l'investimento di un capitale C, nella prima proposta raddoppierebbe il capitale in due anni mentre nella seconda il capitale crescerebbe del 30% l'anno. Qual è la scelta più vantaggiosa?
Nel primo caso dopo due anni il capitale è $2C$.
Nel secondo caso dopo un anno il capitale è diventato $C + 0.3C = 1.3C$, dopo due anni $1.3^2C = 1.69C$ quindi inferiore. Diverso sarebbe se l'aumento annuo fosse del 50%; infatti in questo caso il capitale dopo due anni sarebbe $1.5^2C = 2.25C$ quindi maggiore di $2C$.
Il cliente si chiede quale tasso di interesse, nel secondo caso, rende le due scelte indifferenti?

1.1. Alcune notazioni sull'insieme dei reali

L'insieme dei numeri reali viene indicato con il simbolo **R**

$(\mathrm{R}, +, *)$ è la struttura algebrica dell'insieme dei reali, o campo
R_0^+ è l'insieme dei reali positivi (0 è escluso)
R_0^- è l'insieme dei reali negativi (0 è escluso)
R^+ è l'insieme dei reali non negativi (0 è incluso)
R^- è l'insieme dei reali non positivi (0 è incluso)

Definizioni 1.1

- Relazione di uguaglianza: $=$

$$x = y \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x - y \in \mathrm{R}^- \cap \mathrm{R}^+ = \{0\}$$

Proprietà: riflessiva, simmetrica e transitiva quindi l'uguaglianza è una relazione di equivalenza.

- Relazione di disuguaglianza: $\leq$

$$x \leq y \Leftrightarrow x - y \leq 0 \Leftrightarrow x - y \in \mathrm{R}^-$$
$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0 \Leftrightarrow y - x \in \mathrm{R}^+$$

Teorema 1.1
Proprietà della relazione di disuguaglianza:
$\forall a, b, c \in \mathrm{R}: a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
$\forall a, b \in \mathrm{R}, c \in \mathrm{R}_0^+: a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$
$\forall a, b \in \mathrm{R}, c \in \mathrm{R}_0^-: a \leq b \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$

Esempio 1.1

$a = 2, b = 3, c = 5$
$2 < 3 \Rightarrow 2 + 5 < 3 + 5$
$7 < 8$

$a = 2, b = 3, c = -5$
$2 < 3 \Rightarrow 2 - 5 < 3 - 5$
$-3 < -2$

$2 < 3 \Rightarrow 2 \cdot 5 < 3 \cdot 5$
$10 < 15$
Ma se $a = 2, b = 3, c = -5$ **non è vero che** $2 < 3 \Rightarrow 2 \cdot (-5) < 3 \cdot (-5)$ infatti vale l'opposto: $2 < 3 \Rightarrow -10 > -15$.

Domanda chiave
Oltre all'ordine cosa è rimasto invariato nell'operazione $a + c, b + c$?
È rimasta invariata la "distanza" fra i due punti che è $3 - 2 = 1$.
Nella moltiplicazione per -1 non rimane invariato l'ordine ma rimane invariata la "distanza"

La distanza dipende dall'ordine in cui considero i punti? Posso dire che la distanza fra 2 e 3 è la stessa fra 3 e 2?

1.2. Il concetto di valore assoluto o modulo di un numero reale

Definizione 1.2
Il valore assoluto di un numero $x \in \mathrm{R}$ viene indicato con $|x|$ ed è così definito:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Si osserva che

1) $|x| \geq 0 \forall x \in \mathrm{R}$; infatti $x = 0 \Rightarrow |x| = 0$, $x > 0 \Rightarrow |x| = x > 0$, $x < 0 \Rightarrow |x| = -x > 0$.
2) $-|x| \leq x \leq |x| \; \forall x \in \mathrm{R}$; infatti $|x| = x$ oppure $|x| = -x$.

Teorema 1.2
Ipotesi: $x \in \mathrm{R}$
Tesi: $|-x| = |x| \geq 0$

Dimostrazione:

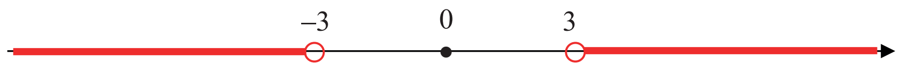
$$|-x| = \begin{cases} -x & \text{se } -x \geq 0 \\ x & \text{se } -x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x & \text{se} x \leq 0 \\ x & \text{se} x > 0 \end{cases} = |x|$$

Osservazione
Si può definire $|x|$ come la distanza dall'origine di un punto dell'asse, il teorema dice che sono uguali le distanze dall'origine di un punto e del suo simmetrico rispetto all'origine.

Esempio 1.2
Voglio risolvere l'equazione $|x| = 1$ ossia trovare i punti per cui la distanza dall'origine è 1.
Se considero i numeri non negativi ossia $x \geq 0$ la soluzione è $x = 1$.
Se considero i numeri negativi ossia $x < 0$ la soluzione è $-x = 1$ ossia $x = -1$.
Entrambe queste soluzioni sono accettabili nel campo dei reali quindi l'insieme delle soluzioni è $S = \{-1,1\}$.

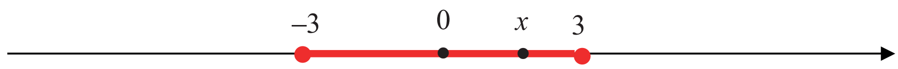
Osservazione
Non è sempre vero che un'equazione di questo tipo ha 2 soluzioni, se avessimo avuto l'equazione $|x| = -1$ non ci sarebbero state soluzioni nei reali; infatti per quanto detto nella definizione 1.2, il valore assoluto di un numero è sempre non negativo. Mentre $|x| = 0$ ha una sola soluzione: $x = 0$.

Esempio 1.3
Voglio risolvere la disequazione $|x| > 3$ ossia trovare i punti per cui la distanza dall'origine è maggiore di 3, sono i punti esterni all'intervallo [-3,3] quindi $x < 3 \vee x > 3$.



Proviamo a dimostrarlo usando la definizione 1.2: $|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \Rightarrow \quad x > 3 \\ -x \text{ se } x < 0 \Rightarrow -x > 3 \Leftrightarrow x < -3 \end{cases}$

Esempio 1.4
Voglio risolvere la disequazione $|x| \leq 3$ ossia trovare i punti per cui la distanza dall'origine è minore di 3, sono i punti esterni all'intervallo $[-3,3]$ quindi $-3 \leq x \leq 3$.



Proviamo a dimostrarlo usando la definizione 1.2: $|x| = \begin{cases} x \text{ se} x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \\ -x \text{ se} x < 0 \Rightarrow -x \leq 3 \Leftrightarrow x \geq -3 \end{cases}$

Osservazione
Cosa succede se il valore con cui confrontiamo il valore assoluto è negativo?
Per esempio l'equazione $|x| < -3$ non ha soluzioni reali, mentre $|x| > -3$ è valida per tutti i valori reali.

Teorema 1.3
In R vale un'importante disuguaglianza riguardante il valore assoluto di due numeri detta *disuguaglianza triangolare*:
$\forall x, y \in \mathrm{R}\ |x + y| \leq |x| + |y|$

Dimostrazione:
Dalla definizione 1.2 si ricava che $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$, sommando membro a membro si ottiene: $-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$.
Quindi nel caso in cui x e y sono concordi
- se $x + y \geq 0$ allora $x + y = |x + y|$ e si ottiene $|x + y| \leq |x| + |y|$
- se $x + y \geq 0$ allora $x + y = |x + y|$ e si ottiene $-|x + y| \geq -|x| - |y|$ da cui $|x + y| \leq |x| + |y|$

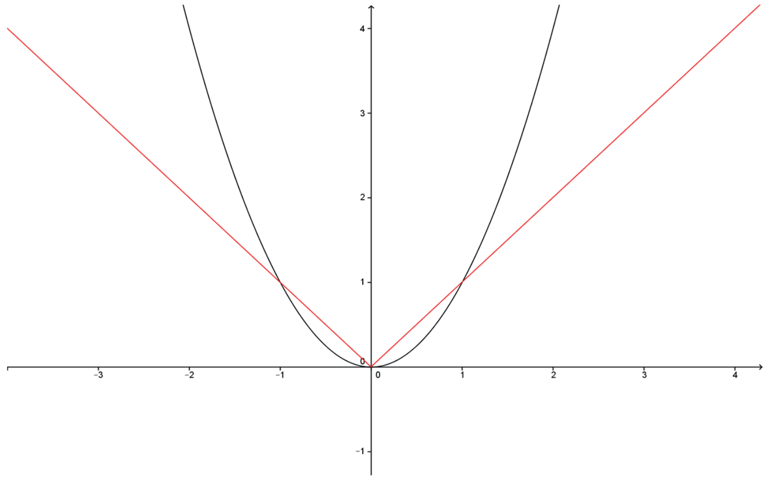
nel caso in cui x e y hanno segno opposto la loro somma ha valore assoluto minore della somma dei valori assoluti.

Perché si chiama disuguaglianza triangolare?
Lo vedremo più avanti quando si parlerà di spazi vettoriali.

Alcune domande chiave

Domanda 1: “Se consideriamo i grafici delle funzioni $y = |x|$ e $y = x^2$ cosa osserviamo?”

Link online 01_Val_ass_Quadrato



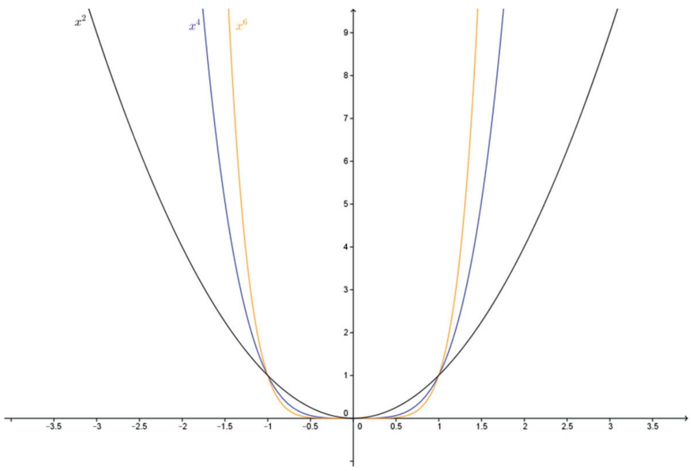
Risposta

1) I grafici sono contenuti nel semipiano delle ordinate non negative ossia l’immagine è R^+.
2) Il valore minimo di y è 0 per entrambe.
3) Il grafico di $y = x^2$ è “liscio” o “smooth” mentre il grafico di $y = |x|$ ha nell’origine una “punta” o, più correttamente, un “punto angoloso”.
4) Entrambe le funzioni valgono 1 per $x = \pm 1$ e 0 per $x = 0$ quindi i due grafici si intersecano nei punti $(-1,1), (1,1)$ e $(0,0)$; infatti $|x| = x^2 \Leftrightarrow \begin{matrix} x \geq 0,\ x = x^2 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0,1 \\ x < 0, -x = x^2 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0,-1 \end{matrix}$

Domanda 2: “Quali altre operazioni unarie in R hanno proprietà analoghe?”

Link online 01_Potenze

Risposta: $x^2, x^4, x^6, \ldots, x^{2n}$ con $n \in N$



Domanda 3: “Le equazioni $|x| = 1$ e $x^2 = 1$ sono equivalenti? E le equazioni $|x| = 2$ e $x^2 = 4$? E le equazioni $x = 1$ e $x^2 = 1$? E le equazioni $|x - 1| = 3$ e $(x - 1)^2 = 9$?”

Link online 01_Esempi_6_7

Risposta

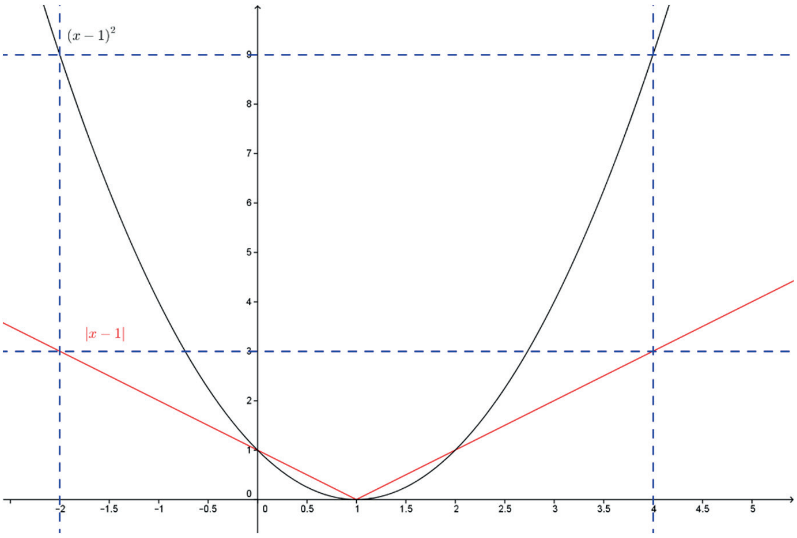
$|x| = 1$ e $x^2 = 1$ sono equivalenti; infatti, come già visto, l'insieme delle soluzioni di entrambe è $S = \{-1,1\}$.

$|x| = 2$ e $x^2 = 4$ sono equivalenti; infatti l'insieme delle soluzioni di entrambe è $S = \{-2,2\}$.

$x = 1$ e $x^2 = 1$ non sono equivalenti; infatti la prima ha soluzione solo $x = 1$ mentre l'insieme delle soluzioni della seconda è $S = \{-1,1\}$.

Anche $|x-1| = 3$ e $(x-1)^2 = 9$ sono equivalenti; infatti l'insieme delle soluzioni di entrambe è $S = \{-2,4\}$

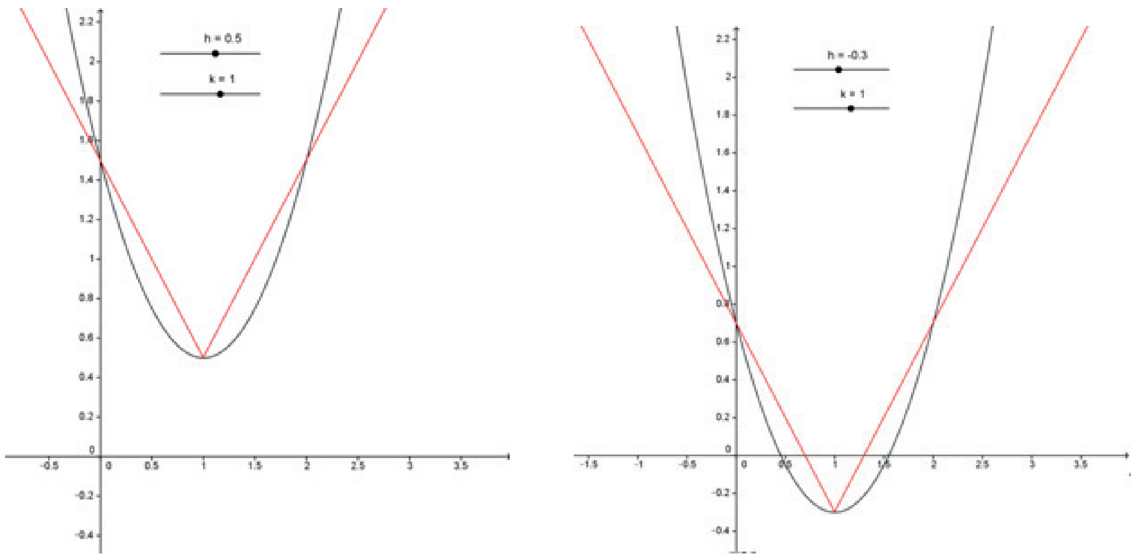
come si può vedere anche dai grafici delle due funzioni $y = |x-1|$ e $y = (x-1)^2$ ottenuti traslando i grafici di $|x|$ e x^2 portando l'origine nel punto $(1, 0)$.



In generale se si traslano i grafici di $|x|$ e x^2 portando l'origine nel punto (k, h) si ottengono le funzioni

$$y - h = |x-k| \to y = |x-k| + h = \begin{cases} x - k + h & \text{se } x \geq k \\ -x + k + h & \text{se } x < k \end{cases}$$

$y - h = (x-k)^2 \to y = x^2 - 2kx + k^2 + h \to y = ax^2 + bx + c$ funzione polinomiale di 2° grado



Le equazioni di secondo grado

Un'equazione di secondo grado ha la forma $ax^2 + bx + c = 0$ $a, b, c \in \mathrm{R}$ con $a \neq 0$ ed è risolvibile tramite la nota formula riportata nel teorema 1.2.

Osservazione
Spesso per risolvere un'equazione di secondo grado non è sempre necessario applicare la formula; infatti si può riprodurre il metodo usato nella dimostrazione del teorema 1.4, detto di completamento del quadrato.
Oppure si usa la proprietà per cui x_1, x_2 sono soluzioni se e solo se l'equazione si può scrivere così:

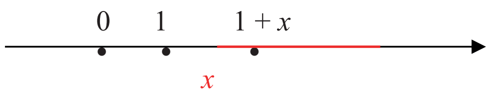
$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \text{ da cui si ricava che } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ e } x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Alcuni esempi di equazioni che **non richiedono l'uso della formula.**

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2 \Rightarrow x + 1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$
$(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2 \vee x = 3$
$x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -3, x_1 x_2 = -4 \Rightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = -4$
$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 2\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \to x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

Una curiosità
$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ è la così detta **sezione aurea**; infatti l'equazione $x^2 - x - 1 = 0$ equivale a $x^2 = x + 1$ e, per $x \geq 0$, si ottiene $1 : x = x : (x+1)$ ossia x è medio proporzionale fra 1 e $1 + x$



Se si fa il seguente calcolo: $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ per ogni n naturale si ottiene sempre un numero intero!

Teorema 1.4
Se $b^2 - 4ac$ è **non negativo** le soluzioni o radici di un'equazione di secondo grado ($a \neq 0$) sono date dalla formula
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ dove il termine $b^2 - 4ac$ è detto discriminante e viene indicato con Δ, in particolare se
$\Delta > 0$ si avranno due soluzioni distinte
$\Delta = 0$ si avrà una soluzione con molteplicità due (o due soluzioni coincidenti)
$\Delta < 0$ non ci saranno soluzioni reali.
La formula è ottenuta scrivendo l'equazione in modo da potere usare la radice quadrata

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

Quindi l'equazione diventa $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ e si vede che le soluzioni esistono se e solo se

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

Esempio 1.5
$x^2 + x + 1 = 0$, il discriminante è $-3 < 0$ quindi quest'equazione non ammette soluzioni nei reali.
È bene ricordare che $\sqrt{x^2} = |x|$ e non $\sqrt{x^2} = x^{2 \cdot \frac{1}{2}} = x$, ed è anche **sbagliato** scrivere $\sqrt{4} = \pm 2$, perché il simbolo di radice corrisponde a una quantità non negativa.
È giusto scrivere $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$.
Occorre fare questa precisazione perché per risolvere ad esempio l'equazione $x^2 = 9$ sarebbe errato scrivere $x = \sqrt{9} = \pm 3$, ma bisogna scrivere $|x| = \sqrt{9} \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$.

Soluzione
Deve risultare $2C = x^2 C$, è ovvio che il valore x è un numero positivo il cui quadrato è 2, ossia $x = \sqrt{2}$.

Il numero $x = \sqrt{2}$ appartiene all'insieme dei **numeri reali** ma non ai razionali; infatti si può dimostrare che non è esprimibile come rapporto di numeri interi.

Osservazione
Questo problema ci fa capire come l'insieme dei numeri reali nasca da un'esigenza di ampliamento dei razionali; infatti, usando i numeri razionali, molti problemi non hanno una soluzione esatta.
È chiaro che il numero $a = \sqrt{2}$ è utilizzabile solo in un calcolo simbolico, nel momento in cui si deve usare praticamente è necessaria una approssimazione. In funzione della precisione richiesta, si useranno diverse approssimazioni di $\sqrt{2}$: 1,41 oppure 1,414 oppure 1,4142 ecc.

Capitolo 2 – **Ancora sugli insiemi numerici**

Problema: Un problema impossibile
Un commerciante vuole importare dall'Australia un articolo il cui prezzo unitario di acquisto alla fonte è 40 euro, non conosce il prezzo di trasporto sa però che è molto elevato in rapporto al valore dell'articolo e che il costo di trasporto è inversamente proporzionale alla quantità.
Il commerciante ha un budget di 100 euro quindi chiede al suo commercialista di dirgli quante unità di questo articolo può ordinare.
Il commercialista gli fa notare che non è detto che sia sempre possibile determinare la quantità, dipende dal costo unitario del trasporto.
Il commerciante, non capisce il ragionamento, chiede una prova matematica.

Intervalli in R

Definizione 2.1

$[a, b] = \{x \in R, a \leq x \leq b\}$ è un intervallo **chiuso**

$(a, b) = \{x \in R, a < x < b\}$ è un intervallo **aperto**

$[a, b) = \{x \in R, a \leq x < b\}$ è un intervallo **chiuso a sinistra** e **aperto a destra**

$(a, b] = \{x \in R, a < x \leq b\}$ è un intervallo **chiuso a destra** e **aperto a sinistra**

$[a, +\infty) = \{x \in R, x \geq a\}$ è un intervallo **chiuso illimitato** "a destra" ossia **superiormente**

$(a, +\infty) = \{x \in R, x > a\}$ è un intervallo **aperto illimitato** "a destra" ossia **superiormente**

$(-\infty, a] = \{x \in R, x \leq a\}$ è un intervallo **chiuso illimitato** "a sinistra" ossia **inferiormente**

$(-\infty, a) = \{x \in R, x < a\}$ è un intervallo **aperto illimitato** "a sinistra" ossia **inferiormente**

Esempio 2.1

$[\mathbf{-1}, \mathbf{2}]$ intervallo **chiuso** e **limitato**

Link online 02_Intervalli_01

$(\mathbf{-1}, \mathbf{2})$ intervallo **aperto** e **limitato**

$[\mathbf{-1}, +\infty)$ intervallo **chiuso** e **illimitato superiormente**

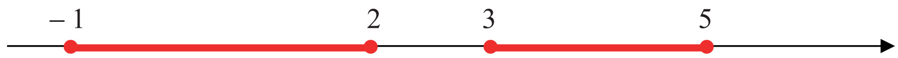
$(-\infty, -\mathbf{1}]$ intervallo **chiuso** e **illimitato inferiormente**

$(-\mathbf{1}, +\infty]$ intervallo **aperto** e **illimitato superiormente**

$(-\infty, -\mathbf{1})$ intervallo **aperto** e **illimitato inferiormente**

$[-\mathbf{1}, \mathbf{2}] \cup [\mathbf{3}, \mathbf{5}]$ **non è un intervallo perché non si può scrivere in uno degli otto modi.**

Link online 02_Intervalli_02



Insiemi limitati e illimitati in R

Definizione 2.2

Se $X \subset \mathrm{R}$ (X sottoinsieme proprio di R) e $\forall x \in X$ vale $x \leq k$ per qualche $k \in \mathrm{R}$, allora k si dice **maggiorante** dell'insieme X, e tale insieme si dirà **limitato superiormente**.

Se $X \subset \mathrm{R}$ (X sottoinsieme proprio di R) e $\forall x \in X$ vale $x \geq h$ per qualche $h \in \mathrm{R}$, allora h si dice **minorante** dell'insieme X, e tale insieme si dirà **limitato inferiormente**.

Un insieme $X \subset \mathrm{R}$ si dice **limitato** se è limitato sia superiormente che inferiormente.

Un insieme che non ammette né maggiorante né minorante si dice **illimitato**.

Esempio 2.2

1. L'insieme $X = (-2,1)$ ammette almeno un maggiorante k; infatti tutti i numeri $k \geq 1$ sono maggioranti. Inoltre ammette almeno un minorante h; infatti tutti i numeri $h \leq -2$ sono minoranti. Pertanto, essendo limitato sia inferiormente che superiormente, X è limitato.
2. L'insieme $X = [5,9) \cup \{10\}$ è limitato, poiché tutti i $k \geq 10$ sono maggioranti e tutti gli $h \leq 5$ sono minoranti.

3. L'insieme $X = (-\infty, 3)$ e $X = (-\infty, 3]$ sono insiemi limitati solo superiormente; infatti tutti i valori $k \geq 3$ sono maggioranti.

Massimo e minimo di un insieme in R

Definizione 2.3

Se $X \subset \mathrm{R}, \exists x^* \in X: \forall x \in X, x \leq x^*$ allora x^* si dice **massimo** dell'insieme X

$$x^* = \max_{x \in X} X$$

Se $X \subset \mathrm{R}, \exists \bar{x} \in X: \forall x \in X, x \geq \bar{x}$ allora $\bar{x}$ si dice **minimo** dell'insieme X

$$\bar{x} = \min_{x \in X} X$$

Esempio 2.3

$X = (-\infty, 3]$ è limitato superiormente e ha massimo $x^* = 3$, mentre $X = (-\infty, 3)$ è anch'esso limitato superiormente ma non possiede un massimo.

$X = \{x \in \mathrm{N}, x = 2n + 1, n \in \mathrm{N}\}$ è l'insieme dei numeri dispari, esso è limitato inferiormente e illimitato superiormente, non ammette massimo ma ha minimo $\bar{x} = 1$.
E i pari? Se ammette minimo, qual è?

Estremi superiore e inferiore di un insieme in R

Definizione 2.4

Sia X un sottoinsieme proprio non vuoto di R, indichiamo con X^* l'insieme di tutti i maggioranti di X, il minimo di X^*si chiama estremo superiore di X e si indica con **sup**$(\boldsymbol{X})$.
Se X possiede un massimo, questo coincide con l'estremo superiore di X.

Sia X un sottoinsieme proprio non vuoto di R, indichiamo con $\overline{X}$ l'insieme di tutti i minoranti di X, il massimo di $\overline{X}$ si chiama estremo inferiore di X e si indica con **inf**$(\boldsymbol{X})$.
Se X possiede un minimo, questo coincide con l'estremo inferiore di X.

Per convenzione se X **non è limitato superiormente** $\sup(X) = +\infty$ e se X **non è limitato inferiormente** $\inf(X) = -\infty$.

Esempio 2.4

$X = (-\infty, 3)$ **non possiede un massimo** ma possiede un estremo superiore: $X^* = [3, +\infty)$ perciò $\sup(X) = 3$, $\inf(X) = -\infty$.

$X = (-\infty, 3]$ **possiede un massimo** infatti $X^* = [3, +\infty)$ perciò $\sup(X) = \max_{x \in X} X = 3, \inf(X) = -\infty$.

$X = (-1,3)$, X è limitato ma non ha minimo, $X^0 = (-\infty, -1] \Rightarrow \inf(X) = -1$.

$X = [2,3]$, questo insieme possiede sia un massimo che un minimo, che coincidono con l'estremo superiore e l'estremo inferiore: $\sup(X) = 3, \inf(X) = 2$.

Assioma 2.1 Assioma di completezza o di continuità
Ogni insieme non vuoto di reali possiede un estremo inferiore e un estremo superiore

Definizione 2.5
Due insiemi $A, B \subset$ R, $A, B \neq \emptyset$ si dicono
separati, se $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha che $a \leq b$;
contigui, se $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{a} \in A, \exists \bar{b} \in B: \bar{b} - \bar{a} < \varepsilon$.
$c \in$ R si dice **elemento separatore** fra A e B se $\forall a \in A, \forall b \in B$ si ha $a \leq c \leq b$
Se A e B sono contigui, allora l'elemento separatore, se esiste, è unico.
Se A e B sono separati, allora esiste almeno un elemento separatore e può essere uno o più di uno.

Esempio 2.5

$A = (1,2), B = (3,4)$, i due insiemi sono separati ed esistono infiniti elementi separatori: $c \in [2,3]$.

Link online 02_Intervalli_03

$A = (-1,0), B = (0,1)$, i due insiemi sono contigui e l'elemento separatore è $c = 0$.

Gli insiemi **Q (numeri razionali)** e **R-Q (numeri irrazionali)** sono contigui ma non separati.

Soluzione
Il commercialista imposta un'equazione dove Q è la quantità incognita, $p = 40$ è il prezzo unitario alla fonte, C è il costo fisso per il trasporto di un articolo e $R = 100$ è il budget.
Si tratterebbe di trovare Q in modo tale che $Qp + \frac{C}{Q} = R$ossia $Q^2p - RQ + C = 0$.
Bisogna risolvere l'equazione nella variabile Q il cui discriminante è $R^2 - 4pC$ perciò se $10000 - 160C > 0$ ossia $C < 62{,}5$ le soluzioni sono due ma solo una di queste è accettabile;
$10000 - 160C = 0$ ossia $C = 62{,}5$ l'equazione ha una soluzione;
$10000 - 160C < 0$ ossia $C > 62{,}5$ le soluzioni dell'equazione sono complesse quindi non esiste una quantità che risponda alla richiesta del commerciante!

Link online 02_Problema_impossibile

Capitolo 3 – **Le funzioni reali**

Problema: il punto di break-even
Un'impresa produce un modello di automobile sostenendo una spesa fissa mensile di 3.000.000 euro ed una spesa variabile di 6.000 euro per ogni auto prodotta. Il prezzo di vendita è di 8.000 euro per unità. Quale quantità minima è necessario produrre per non lavorare in perdita?

Definizione 3.1

Si definisce una **funzione reale di una variabile reale** un'applicazione $f: X \to \mathrm{R}$ che ad ogni elemento dell'insieme $X \subseteq R$ detto **dominio** della funzione, associa uno e un solo elemento di R ossia è una **relazione univoca**:

$$\forall x \in X, \exists!\, y = f(x) \in \mathrm{R}$$

x è detta variabile indipendente, mentre y è detta variabile dipendente o **immagine** di x.

R è detto **codominio** della funzione e l'insieme

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathrm{R}: y = f(x), x \in X\}, \quad \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{R}$$

è detto **insieme immagine.**

Il **grafico** di una funzione nel piano è costituito da tutti i punti dell'insieme

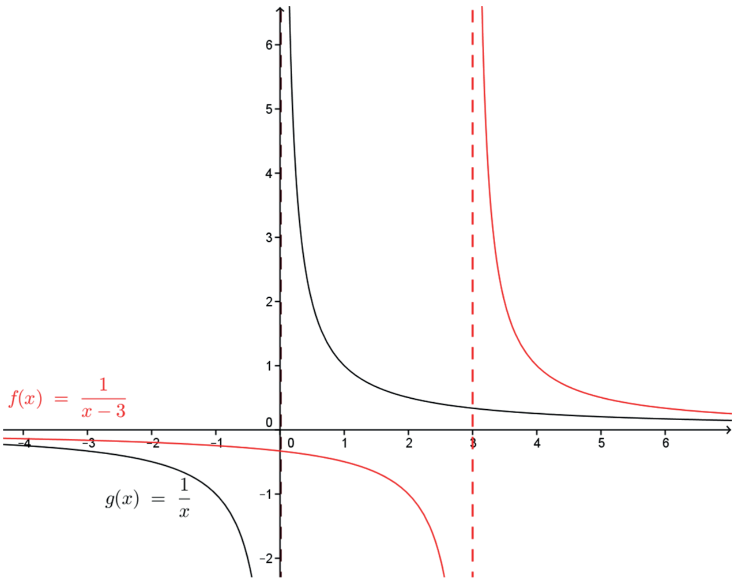
$G_f = \{(x, y), x \in X, y = f(x)\}$, ossia una curva bidimensionale.

Esempio 3.1

$f(x) = \frac{1}{x-3}$; il dominio è contenuto nel Campo di esistenza $(C.E.)$ costituito da tutti i valori per cui la funzione restituisce un valore reale, in questo caso tutti i reali eccetto $x = 3$, perciò $D \subseteq C.E. = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

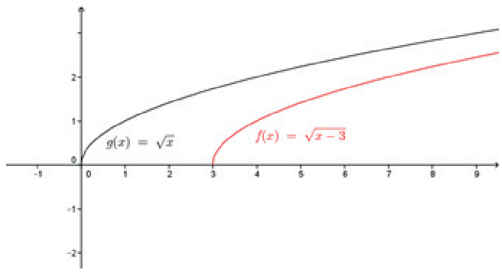
Il grafico è quello della funzione $g(x) = \frac{1}{x}$ definita per $x \neq 0$ traslato di 3 rispetto ad x.

Link online 03_Funzioni_01



$f(x) = \sqrt{x-3}$; il dominio è costituito da tutti i reali maggiori o uguali a tre: $X = [3, +\infty)$.

Il grafico è quello della funzione $g(x) = \sqrt{x}$ definita per $x \geq 0$ traslato di 3 rispetto ad x.



Link online 03_Funzioni_02

Esempio 3.2
Calcolo del Campo di esistenza di funzioni reali a una variabile reale

1) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$; la funzione esiste se il denominatore non si annulla quindi
$D \subseteq C.E. = \{x \in \mathrm{R}: x^2 - 4 \neq 0\} = \{x \in \mathrm{R}: x \neq \pm 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +2) \cup (+2, +\infty)$

2) $f(x) = \sqrt{x-3}$, non negatività del radicando
$D \subseteq C.E. = \{x \in \mathrm{R}: x - 3 \geq 0\} = \{x \in \mathrm{R}: x \geq 3\} = [3, +\infty)$

3) $f(x) = \ln(x+4)$; positività della base e dell'argomento di un logaritmo
$D \subseteq C.E. = \{x \in \mathrm{R}: x + 4 > 0\} = \{x \in \mathrm{R}: x > -4\} = (-4, +\infty)$

4) $f(x) = (x+1)^x$; positività della base di un esponenziale
$D \subseteq C.E. = \{x \in \mathrm{R}: x + 1 > 0\} = \{x \in \mathrm{R}: x > -1\} = (-1, +\infty)$

5) $f(x) = \frac{2}{\ln(x-2)}$;
$D \subseteq C.E. = \{x \in \mathrm{R}: x - 2 > 0 \wedge \ln(x-2) \neq 0\} = \{x \in \mathrm{R}: x > 2 \wedge x \neq 3\} = (2,3) \cup (3, +\infty)$

Altri Esempi
Link online 03_max_min_01
Link online 03_max_min_02

Osservazione
Il dominio di una funzione è contenuto nell'insieme per cui la funzione può essere calcolata, quindi in generale il dominio (D) è contenuto nel Campo di esistenza ($C.E.$) ma può anche non coincidere con esso.
Negli esempi che vedremo in seguito, qualora non ci sia possibilità di distinguerli, sceglieremo come dominio il campo di esistenza.

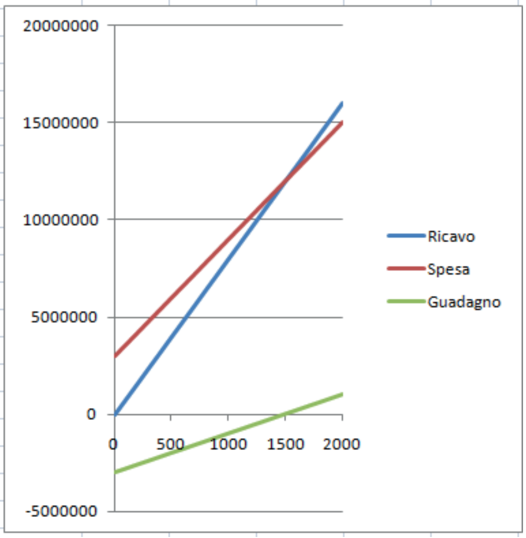
Soluzione
Si determina qualitativamente se esiste una quantità minima studiando i grafici delle funzioni spesa e ricavo mensili in funzione della quantità x prodotta. Chiamando S, R e G rispettivamente spesa, ricavo e guadagno si ha che

$$S(x) = 6000x + 3000000,\ R(x) = 8000x,\ G(x) = 2000x - 3000000$$

Si tratta di funzioni polinomiali di primo grado (affini) quindi il grafico di ciascuna di esse si può tracciare usando solo due punti (assioma di Euclide).

B2 f_x =G2*A2

X	Ricavo	Spesa	Guadagno	C.F.	C.V.	Prezzo	B.P.
0	0	3000000	-3000000	3000000	6000	8.000	1500
100	800000	3600000	-2800000				
200	1600000	4200000	-2600000				
300	2400000	4800000	-2400000				
400	3200000	5400000	-2200000				
500	4000000	6000000	-2000000				
600	4800000	6600000	-1800000				
700	5600000	7200000	-1600000				
800	6400000	7800000	-1400000				
900	7200000	8400000	-1200000				
1000	8000000	9000000	-1000000				
1100	8800000	9600000	-800000				
1200	9600000	10200000	-600000				
1300	10400000	10800000	-400000				
1400	11200000	11400000	-200000				
1500	12000000	12000000	0				
1600	12800000	12600000	200000				
1700	13600000	13200000	400000				
1800	14400000	13800000	600000				
1900	15200000	14400000	800000				
2000	16000000	15000000	1000000				



Si osserva che i grafici di $S(x)$ e di $R(x)$ si intersecano cioè c'è un valore della produzione x_0 tale che $S(x_0) = R(x_0)$ ovvero $G(x_0) = 0$; inoltre per valori $x < x_0$ risulta $S(x) > R(x)$ ossia $G(x) < 0$ e per valori $x > x_0$ risulta $S(x) < R(x)$ ossia $G(x) > 0$ quindi x_0 è il valore per cui la ditta è in pareggio e oltre il quale guadagna.
Poi si passa a calcolare la quantità x_0 risolvendo l'equazione:

$$S(x) = R(x) \Leftrightarrow G(x) = R(x) - S(x) = 0 \text{ ossia } 2x - 3000 = 0 \Leftrightarrow x = 1500$$

Concludendo la ditta, per non essere in perdita, deve produrre e vendere almeno 1500 auto.

Capitolo 4 – **Funzioni reali in una variabile reale**

Problema 1: Un altro problema break-even
Un'impresa produce formaggio sostenendo mensilmente un costo fisso C_f ed una spesa variabile dipendente dalla quantità prodotta nel mese. Il prezzo di vendita al quintale è di 1.500 euro.
Quale quantità minima è necessario produrre mensilmente per non lavorare in perdita?

Problema 2: Il problema dell'investimento
Un cliente, avendo scelto per l'investimento di un capitale C la proposta per cui il capitale investito cresce del 3% l'anno. Vuole conoscere qual è l'andamento negli anni dell'investimento.

Definizione 4.1

Una funzione definita in ***X*** si dice

monotona strettamente crescente se	$\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2, f(x_1) < f(x_2)$
monotona crescente se	$\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2, f(x_1) \leq f(x_2)$
monotona strettamente decrescente se	$\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2, f(x_1) > f(x_2)$
monotona decrescente se	$\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2, f(x_1) \geq f(x_2)$

Esempio 4.1
$y = \sqrt{x},\ x \geq 0$ è monotona strettamente crescente; infatti $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{R}^+\ x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$
$y = 3,\ x \in \mathrm{R}$ è monotona decrescente e anche monotona crescente; infatti $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{R}\ f(x_1) = f(x_2) = 3$.
$y = -x^3,\ x \in \mathrm{R}$ è monotona strettamente decrescente; infatti $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{R}\ x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1^3 > -x_2^3$
$y = x^2,\ x \in \mathrm{R}$ non è monotona; infatti esistono $x_1 = -2, x_2 = 1 \in \mathrm{R}$ per cui $4 = f(-2) > f(1) = 1$
ma esistono $x_1 = -1, x_2 = 2 \in \mathrm{R}$ per cui $1 = f(-1) < f(2) = 4$.
$y = x^2,\ x \in \mathrm{R}^+$ è monotona strettamente crescente infatti $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{R}^+\ x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2$

Si introducono ora le seguenti definizioni la cui utilità è puramente teorica, la verifica di tali proprietà sarà affrontata più avanti nel corso.

Definizione 4.2

Una funzione definita in ***X* intervallo** si dice
convessa se
$$\forall x_1, x_2 \in X\ f(hx_1 + (1-h)x_2) \leq hf(x_1) + (1-h)f(x_2),\ h \in [0,1]$$
strettamente convessa se
$$\forall x_1, x_2 \in X \text{ con } x_1 \neq x_2 f(hx_1 + (1-h)x_2) < hf(x_1) + (1-h)f(x_2),\ h \in (0,1)$$
concava se
$$\forall x_1, x_2 \in X\ f(hx_1 + (1-h)x_2) \geq hf(x_1) + (1-h)f(x_2),\ h \in [0,1]$$
strettamente concava se
$$\forall x_1, x_2 \in X \text{ con } x_1 \neq x_2 f(hx_1 + (1-h)x_2) > hf(x_1) + (1-h)f(x_2),\ h \in (0,1)$$

Alcune funzioni elementari

Funzione affine

Ponendo uguale a 0 un polinomio di primo grado si ha l'equazione $ax + by + c = 0$ che, se $b \neq 0$, determina una funzione detta **funzione affine** che ha come grafico una retta**,** se $c = 0$ il grafico è una retta che passa per l'origine.

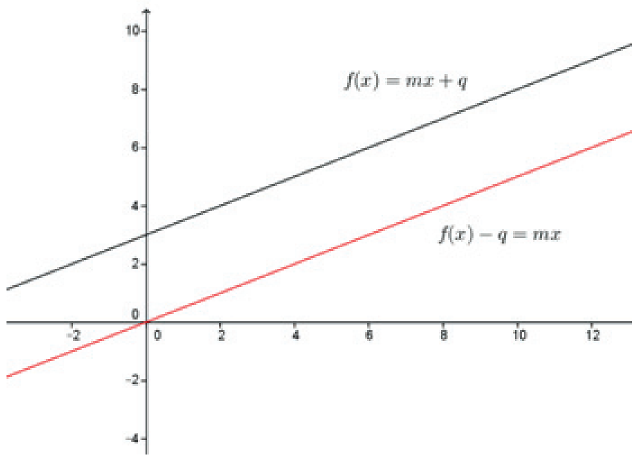
In particolare si ha che:

se $b \neq 0$ $\quad ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ quindi $y = f(x) = mx + q$

Dove m (coefficiente angolare o pendenza) e q (ordinata all'origine) sono costanti reali; se $m = 0$ si avrà una retta parallela all'asse x, se invece $q = 0$, si avrà una retta passante per l'origine.

se $b = 0$ $\quad ax + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$ retta parallela all'asse delle ordinate

La funzione affine spesso viene detta lineare in quanto è riconducibile ad una lineare mediate la traslazione di $-q$ rispetto all'asse y



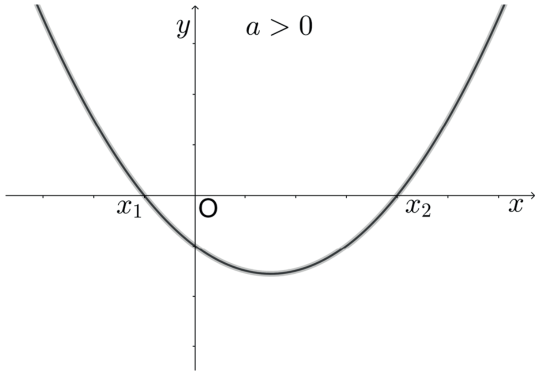
La funzione affine è monotona strettamente crescente se $m > 0$, monotona strettamente decrescente se $m < 0$ e monotona crescente e decrescente se $m = 0$. È inoltre una funzione sia concava che convessa.

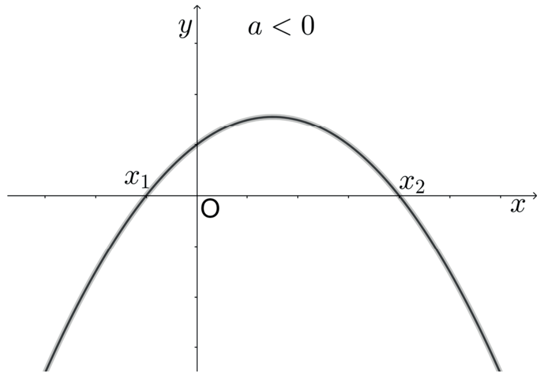
Link online 04_Affine

Funzione quadratica

È rappresentata da una parabola di equazione

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$





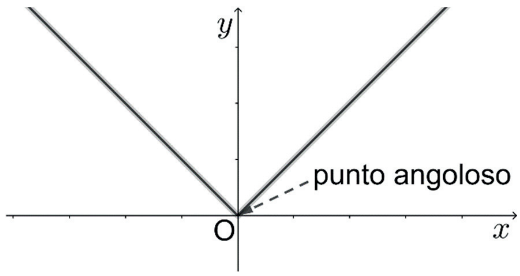
La funzione quadratica ($a \neq 0$) non è monotona ed è strettamente convessa se $a > 0$ e strettamente concava se $a < 0$.

Funzione valore assoluto

È rappresentata dalle semirette
bisettrici del primo e secondo quadrante

$y = f(x) = |x|$
Il punto O(0,0) è un punto angoloso.

La funzione valore assoluto non è monotona ed è convessa non strettamente.



Funzione di proporzionalità inversa
$y = f(x) = \frac{k}{x}, x \neq 0$, le rette $y = 0$ e $x = 0$ si chiamano **asintoti** della funzione e il suo grafico è un'**iperbole equilatera.**