Francesco Menoncin

Mercati finanziari

Misurazione e gestione dei rischi

Giappichelli

Capitolo 1

Il mercato finanziario in tempo discreto

1.1 Il mercato a un solo periodo

Supponiamo di operare su un mercato aperto solo nell'intervallo $[t, t+1]$, sul quale siano quotati due tipi di titoli:

1. un titolo privo di rischio; i suoi prezzi in t e $t+1$, che indichiamo con $G(t)$ e $G(t+1)$ rispettivamente, sono entrambi conosciuti in t; sul mercato finanziario non esiste nessun titolo che sia completamente «privo di rischio» e, tuttavia, si prende come approssimazione il titolo emesso dal soggetto più affidabile all'interno di uno Stato (il Governo – motivo della lettera «G») e per la scadenza più breve (il futuro, infatti, implica incertezza e minore è il futuro minore è l'incertezza); nell'area Euro, quindi, si può prendere il Bund tedesco a 3 mesi;

2. titoli rischiosi (nel numero di n); il prezzo del titolo i al tempo t verrà indicato con $S_i(t)$; nel caso dei titoli rischiosi non conosciamo, al tempo t, quale sarà il prezzo $S_i(t+1)$.

Chiamerò $\Phi(t)$ il vettore dei prezzi di tutti i titoli al tempo t su questo mercato:

$$\underset{(n+1)\times 1}{\Phi(t)} = \begin{bmatrix} G(t) \\ S_1(t) \\ S_2(t) \\ \ldots \\ S_n(t) \end{bmatrix}.$$

Supponiamo che al tempo $t+1$ si possano manifestare k «situazioni» diverse (definite «stati del mondo»). In ogni stato del mondo i prezzi dei titoli possono assumere valori differenti; fa eccezione il titolo privo di rischio che deve avere sempre lo stesso valore (altrimenti non sarebbe «privo di rischio»).

Indicando con $S_i\,(t+1,j)$ il prezzo del titolo i, al tempo $t+1$ e nello stato del mondo j, allora la matrice dei prezzi futuri $\Phi\,(t+1)$ si può scrivere come segue:

$$\underset{(n+1)\times k}{\Phi\,(t+1)} = \begin{array}{c} \\ \text{Valori} \\ \text{dei} \\ \text{titoli} \end{array} \begin{array}{c} \text{Stati del mondo} \\ \left[\begin{array}{cccc} G\,(t+1) & G\,(t+1) & ... & G\,(t+1) \\ S_1\,(t+1,1) & S_1\,(t+1,2) & ... & S_1\,(t+1,k) \\ S_2\,(t+1,1) & S_2\,(t+1,2) & ... & S_2\,(t+1,k) \\ ... & ... & ... & ... \\ S_n\,(t+1,1) & S_n\,(t+1,2) & ... & S_n\,(t+1,k) \end{array} \right] \end{array}.$$

Su questo mercato il rendimento del titolo S_i nel passaggio dal tempo t al tempo $t+1$ e nello stato del mondo j è dato da

$$\frac{S_i\,(t+1,j) - S_i\,(t)}{S_i\,(t)}.$$

Nel caso del titolo privo di rischio il rendimento verrà chiamato «tasso privo di rischio» ed è uguale in tutti gli stati del mondo:

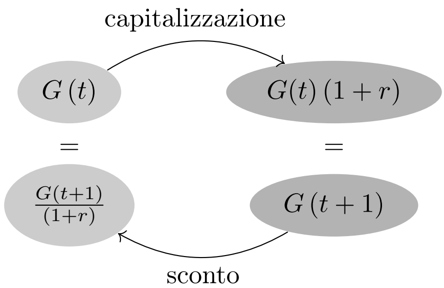
$$r\,(t,t+1) := \frac{G\,(t+1) - G\,(t)}{G\,(t)},$$

da cui

$$G\,(t+1) = G\,(t)\,(1 + r\,(t,t+1))\,.$$

Così, dato il valore del titolo al tempo t, si può ottenere il valore al tempo $t+1$ moltiplicando per $1+r\,(t,t+1)$, definito **fattore di capitalizzazione** o **di montante**, oppure, dato il valore al tempo $t+1$ si può ottenere il valore al tempo t moltiplicando per l'inverso $(1+r\,(t,t+1))^{-1}$ che viene definito **fattore di attualizzazione** o **di sconto** (Figura 1.1.1).

Figura 1.1.1: Capitalizzazione e attualizzazione



1.2 Un portafoglio di titoli

Si definisce «portafoglio», o anche «strategia», una qualsiasi combinazione lineare di titoli. Se chiamiamo $\theta(t)$ il vettore (ovviamente di dimensione $n+1$) che contiene la quantità di ogni titolo detenuta in portafoglio e $R(t)$ la ricchezza totale investita, allora vale

$$R(t) = \underset{1\times(n+1)}{\theta(t)^{\intercal}} \underset{(n+1)\times 1}{\Phi(t)} ,$$

dove con l'apice $\intercal$ si è indicata la trasposizione.

> *Osservazione* 1.2.1. Per convenzione indicherò con un segno di «trasposto» i vettori riga, mentre i vettori colonna non saranno segnati in alcun modo.

> *Osservazione* 1.2.2. Quando un elemento di $\theta(t)$ ha segno positivo (negativo) il corrispondente titolo è acquistato (venduto). Si può vendere anche un titolo che non si possiede e, in questo caso, si parla di «vendita allo scoperto» (ovvero, posizione «corta»).

Nel periodo successivo la ricchezza (portafoglio) può assumere k diversi valori a seconda dello stato del mondo in cui ci si trova:

$$\underset{1\times k}{R(t+1)^{\intercal}} = \underset{1\times(n+1)}{\theta(t)^{\intercal}} \underset{(n+1)\times k}{\Phi(t+1)}.$$

Faccio notare che la composizione del portafoglio è rimasta quella del tempo t poiché in $t+1$ si ipotizza che il portafoglio non possa essere modificato (il mercato chiude).

1.3 L'arbitraggio sul mercato finanziario

L'arbitraggio è un portafoglio che consente di creare ricchezza dal nulla. Si suppone, quindi, di investire denaro sul mercato al tempo t senza possederne[1] e di ottenere in $t+1$ sempre (cioè in ogni stato del mondo) ricchezza strettamente positiva (nella letteratura anglosassone, l'arbitraggio è significativamente chiamato «*money machine*» [macchina da soldi]).

Immaginiamo il seguente mercato:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}, \qquad \Phi(t+1) = \begin{bmatrix} 102 & 102 & 102 \\ 105 & 110 & 115 \end{bmatrix}, \tag{1.3.1}$$

[1]Tecnicamente, quindi, si ipotizza di partire con ricchezza nulla o, addirittura, negativa, cioè prendendo a prestito del denaro.

dove si hanno un titolo privo di rischio che rende sempre il 2% e un titolo rischioso che rende, a seconda dello stato del mondo, il 5%, il 10% o il 15%. Se acquistiamo il titolo rischioso utilizzando il denaro ottenuto dalla vendita allo scoperto del titolo privo di rischio, il saldo iniziale è nullo (non dobbiamo possedere alcuna ricchezza nostra) e in $t+1$ il saldo è sempre positivo (Tabella 1.3.1). Questo è un arbitraggio.

Tabella 1.3.1: Arbitraggio su un mercato come in (1.3.1)

Oggi t	*Domani (t + 1)*		
	Stato 1	*Stato 2*	*Stato 3*
Acq. titolo rischioso (−100)	+105	+110	+115
Vend. titolo senza rischio (+100)	−102	−102	−102
Saldo (0)	+3	+8	+13

Sarebbe possibile creare un arbitraggio anche con un altro tipo di mercato:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}, \qquad \Phi(t+1) = \begin{bmatrix} 115 & 115 & 115 \\ 105 & 110 & 112 \end{bmatrix}. \tag{1.3.2}$$

Questa volta la strategia di arbitraggio è quella di comprare il titolo privo di rischio (pagando 100) e vendere allo scoperto il titolo rischioso (incassando 100). Al tempo $t+1$, poi, posso vendere il titolo privo di rischio incassando 115 e ricomprare il titolo rischioso pagando 105, 110, oppure 112 (a seconda dello stato del mondo), ma avendo, comunque, un risultato positivo come mostrato nella Tabella 1.3.2.

Tabella 1.3.2: Arbitraggio su un mercato come in (1.3.2)

Oggi t	*Domani (t + 1)*		
	Stato 1	*Stato 2*	*Stato 3*
Vend. tit. rischioso (+100)	−105	−110	−112
Acq. tit. senza rischio (−100)	+115	+115	+115
Saldo (0)	+10	+5	+3

Nel mercato seguente, invece,

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}, \qquad \Phi(t+1) = \begin{bmatrix} 105 & 105 & 105 \\ 102 & 110 & 112 \end{bmatrix}, \tag{1.3.3}$$

non è possibile creare arbitraggio perché qualunque portafoglio genera un profitto in uno stato del mondo e una perdita nell'altro.

Osservazione 1.3.1. Le strategie di arbitraggio che ho mostrato non sono uniche. Nel caso del mercato (1.3.1), per esempio, sarebbe un arbitraggio anche l'acquisto di 10 titoli rischiosi e la vendita allo scoperto di 10 titoli privi di rischio. Questo risultato è generalizzabile: quando sul mercato finanziario si trova un arbitraggio, allora esistono infiniti arbitraggi.

Passiamo a una definizione più formale di arbitraggio.

Definizione 1.3.2. Un arbitraggio tra t e $t+1$ è un portafoglio che, avendo valore negativo in t, ha valori sempre non-negativi in $t+1$:

$$\underset{1\times(n+1)}{\theta(t)^{\mathsf{T}}}\underset{(n+1)\times 1}{\Phi(t)} < 0,$$
$$\underset{1\times(n+1)}{\theta(t)^{\mathsf{T}}}\underset{(n+1)\times k}{\Phi(t+1)} \geq \underset{1\times k}{0^{\mathsf{T}}},$$

oppure un portafoglio che, avendo valore non positivo in t, ha sempre valore positivo in $t+1$:

$$\underset{1\times(n+1)}{\theta(t)^{\mathsf{T}}}\underset{(n+1)\times 1}{\Phi(t)} \leq 0,$$
$$\underset{1\times(n+1)}{\theta(t)^{\mathsf{T}}}\underset{(n+1)\times k}{\Phi(t+1)} > \underset{1\times k}{0^{\mathsf{T}}}.$$

Osservazione 1.3.3. I casi qui esposti sono i cosiddetti arbitraggi **forti**. Si definisce, invece, arbitraggio **debole** il caso in cui in entrambe le disequazioni valga il simbolo in forma debole. Un arbitraggio debole, quindi, esiste anche se si parte da una ricchezza nulla in t e si arriva, in almeno uno stato del mondo, a una ricchezza nulla in $t+1$.

I conti relativi alle disequazioni di (non) arbitraggio si possono molto semplificare grazie al seguente lemma.

Lemma 1.3.4 (Farkas-Stiemke). *Dati* $\underset{(n+1)\times k}{\Phi(t+1)}$ *e* $\underset{(n+1)\times 1}{\Phi(t)}$ *, una e solo una delle seguenti alternative è verificata:*

1. *esiste $\theta(t)$ tale che*

$$\underset{1\times(n+1)}{\theta(t)^{\mathsf{T}}}\underset{(n+1)\times 1}{\Phi(t)} \leq 0, \qquad \underset{1\times(n+1)}{\theta(t)^{\mathsf{T}}}\underset{(n+1)\times k}{\Phi(t+1)} \geq \underset{1\times k}{0^{\mathsf{T}}},$$

con almeno una disuguaglianza stretta (comprendendo, quindi, entrambi casi della Definizione 1.3.2);

2. *esiste $p > 0$ tale che*

$$\underset{(n+1)\times k}{\Phi(t+1)}\underset{k\times 1}{p} = \underset{(n+1)\times 1}{\Phi(t)}.$$

Il confronto, immediato, tra il Lemma 1.3.4 e la Definizione 1.3.2, ci consente di affermare quanto segue.

Proposizione 1.3.5. *Non esiste possibilità di arbitraggio se e solo se esiste un vettore $\underset{k\times 1}{p} > 0$ che soddisfa*

$$\underset{(n+1)\times k}{\Phi(t+1)}\cdot\underset{k\times 1}{p} = \underset{(n+1)\times 1}{\Phi(t)}. \tag{1.3.4}$$

L'Equazione (1.3.4) rappresenta, in forma sintetica, un sistema di $n+1$ equazioni in k incognite. Dall'algebra lineare, quindi, sappiamo che ci sono tre casi possibili per risolvere il sistema (1.3.4): esistono infinite soluzioni, esiste una soluzione unica oppure non esiste nessuna soluzione (e sul mercato c'è arbitraggio).

1.4 Titoli privi di rischio

Supponiamo che sul mercato finanziario vi siano due titoli privi di rischio; il sistema (1.3.4), solo relativamente a questi titoli, si scrive

$$\begin{bmatrix} G_1(t+1) & G_1(t+1) & ... & G_{1(t+1)} \\ G_{2,}(t+1) & G_2(t+1) & ... & G_2(t+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ ... \\ p_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1(t) \\ G_2(t) \end{bmatrix},$$

o, in forma di sommatorie:

$$G_1(t+1)\sum_{j=1}^{k} p_j = G_1(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{k} p_j = \frac{G_1(t)}{G_1(t+1)},$$
$$G_2(t+1)\sum_{j=1}^{k} p_j = G_2(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{k} p_j = \frac{G_2(t)}{G_2(t+1)}.$$

Si nota immediatamente che esiste un vettore p che soddisfa entrambe le equazioni se e solo se vale la condizione

$$\frac{G_1(t)}{G_1(t+1)} = \frac{G_{2,}(t)}{G_2(t+1)},$$

la quale può essere riscritta come

$$\frac{G_1(t+1) - G_1(t)}{G_1(t)} = \frac{G_2(t+1) - G_2(t)}{G_2(t)}.$$

Questa condizione ci dice che il rendimento dei due titoli deve essere uguale. Tale conclusione è importante e ci permette di affermare quanto segue.

> **Proposizione 1.4.1.** *Su un mercato privo di arbitraggio tutti i titoli senza rischio devono avere lo stesso rendimento, ovvero su un mercato privo di arbitraggio può esistere uno e un solo tasso di interesse privo di rischio.*

1.5 La prezzatura dei titoli

In finanza un «***contingent claim***» (a volte tradotto come «titolo contingente») è un titolo che paga un'unità monetaria in un particolare stato del mondo. Un *contingent claim* che paga nel generico stato del mondo i ha i seguenti *payoffs*:

$$\underset{1\times k}{X(t+1)^{\mathsf{T}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dove il valore 1 deve intendersi nella posizione $i-$esima del vettore $X(t+1)$. Questo titolo può essere interpretato come:

- una assicurazione: compro il titolo $X(t)$ in modo da avere 1 euro al tempo $t+1$ se accade uno stato del mondo a me avverso;
- una scommessa: punto sul fatto che, in $t+1$, si verifichi un particolare stato del mondo.

Entrambe le interpretazioni sono possibili e, infatti, nessun titolo, per sua stessa natura, è una copertura o una speculazione. Il giudizio va dato relativamente a un portafoglio e non a un singolo titolo. Vediamo i due casi:

- copertura: nello stato del mondo i subirò una perdita; comprando il titolo contingente mi sto assicurando;
- speculazione: la mia ricchezza non subirà, per sua natura, nessuna variazione particolare nello stato del mondo i; se, in questo caso, compro il titolo contingente, allora sto facendo una scommessa.

Sul titolo contingente deve valere la relazione di non arbitraggio come su qualsiasi altro titolo e, quindi, il suo prezzo deve soddisfare l'equazione

$$X(t) = X(t+1)^{\mathsf{T}} p,$$

ovvero

$$X(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_i \\ \dots \\ p_{k-1} \\ p_k \end{bmatrix} = p_i.$$

Il valore p_i, quindi, è il prezzo di un contratto di assicurazione che copre dal rischio che si verifichi lo stato del mondo i. Per questo motivo p_i è chiamato «prezzo dello stato del mondo».

Con questo esercizio, inoltre, abbiamo trovato, per la prima volta, il prezzo di un titolo; abbiamo, cioè, fatto «***asset pricing***».

Più in generale, conosciuto il vettore $p > 0$, si può determinare il prezzo di qualsiasi titolo del quale si conoscano i *payoffs* futuri. Possiamo così concludere che:

- se il sistema (1.3.4) ha infinite soluzioni, la prezzatura di un titolo condurrà a un possibile intervallo di valori (che escludono l'arbitraggio dal mercato);
- se il sistema (1.3.4) ha un'unica soluzione, ogni titoli emesso sul mercato avrà un prezzo unico;
- se il sistema (1.3.4) non ha soluzione, non è possibile utilizzare questo metodo per fare prezzatura dei titoli.

Vediamo un esempio di un mercato con infinite soluzioni.

Esempio 1.5.1. Sul mercato

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 105 \\ 50 \end{bmatrix}, \qquad \Phi(t+1) = \begin{bmatrix} 105 & 105 & 105 \\ 48 & 50 & 55 \end{bmatrix},$$

vogliamo determinare il prezzo $X(t)$ del seguente titolo

$$X(t+1) = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \end{bmatrix}.$$

Su questo mercato non vi è arbitraggio se il vettore p assume la seguente forma

$$p = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}p_3 \\ 1 - \frac{7}{2}p_3 \\ p_3 \end{bmatrix},$$

con

$$0 < p_3 < \frac{2}{7}.$$

Il prezzo del titolo $X(t)$, quindi, è dato da

$$X(t) = X(t+1)\,p = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{2}p_3 \\ 1 - \frac{7}{2}p_3 \\ p_3 \end{bmatrix} = 20 - 15p_3.$$

Poiché il prezzo p_3 deve essere compreso tra 0 e $\frac{2}{7}$, allora il prezzo di $X(t)$ che elimina l'arbitraggio dal mercato deve soddisfare

$$\frac{110}{7} < X(t) < 20.$$

In un mercato che presenta infiniti valori di p non siamo in grado di dare un prezzo unico ai nuovi titoli (siamo solo in grado di stabilire una forchetta di prezzi all'interno della quale non vi è arbitraggio). Questo è un problema che rivedremo in un prossimo paragrafo.