Ernesto Salinelli

Appunti di matematica

Giappichelli

Prefazione

In questo lavoro, come segnala il suo titolo, ho raccolto il contenuto delle lezioni svolte per l'insegnamento di Matematica del primo anno del Corso di Laurea triennale in Economia Aziendale dell'Università del Piemonte Orientale.

Il testo si presenta, con linguaggio automobilistico, come un ibrido cartaceo/digitale. Nella parte cartacea si trova la trattazione degli aspetti principali di ciascun argomento, organizzata in sei capitoli. La parte digitale raccoglie argomenti di complemento, esempi più complessi, approfondimenti e test di verifica, come spiegato più in dettaglio nella successiva guida alle risorseWEB.

Anche dal punto di vista del tipo di presentazione, questo libro è un ibrido: si presenta come un "libro di teoria", completando idealmente il già pubblicato "Esercizi di Matematica". Per tale motivo non sono presenti esercizi proposti, per i quali si rimanda, senza alcuna necessità di riferimenti espliciti, al summenzionato eserciziario. D'altra parte, la presentazione di ciascun argomento è imperniata su motivazioni, esemplificazioni, quindi l'eventuale definizione o teorema vengono introdotti come una risposta ad una esigenza. Tutto si concretizza in una massiccia presenza di esempi, quasi 200, spesso corredati da figure. Ho cercato di massimizzare i rimandi incrociati all'interno di ciascun argomento e fra differenti argomenti, per spingere chi legge a non muoversi solo per piccoli passi, indispensabili in una prima lettura, ma a sviluppare anche una visione di insieme.

Un ringraziamento va a Francesca Centrone per l'attenta lettura del manoscritto con la quale ha stanato errori e/o imprecisioni che mi piacerebbe pensare fossero i soli presenti. Mi scuso in anticipo per la presenza di ulteriori refusi di cui, ovviamente, sono da considerare l'unico responsabile, confidando che mi vengano segnalati. Ringrazio anche Sergio Margarita con il quale ho condiviso la bella esperienza di "Multimath" dalla quale, inevitabilmente, ho tratto parziale ispirazione, e Maurizio Rinaldi per l'aiuto in fase di redazione e la carica di entusiasmo e passione che manifesta e trasmette. Un ringraziamento va poi alla Redazione dell'Editore, in particolare a Filippo De Cecco, Francesca Leva e Valentina Zaza, per il supporto fornito con la consueta professionalità in fase di realizzazione del testo.

Novara, luglio 2021

L'Autore

Guida alle risorse WEB

Una parte non secondaria di quest'opera è costituita da alcune risorse, disponibili sul sito dell'Editore, all'indirizzo **www.giappichelli.it**, secondo modalità descritte nella pagina finale di questo testo cartaceo.
Le risorse sono di due tipi.
Il primo, denominato convenzionalmente **risorsaWEB** seguito da un numero identificativo e segnalato sul margine della pagina dal simbolo, è costituito da complementi, dimostrazioni di alcuni teoremi e alcuni approfondimenti.
Il secondo tipo di risorse è costituito da batterie di test, denominate **test di verifica**, disponibili per ciascun capitolo oppure, in alternativa, su tutti gli argomenti del libro. Tali test si basano in gran parte su domande a livello d'esame, quindi si consiglia di utilizzarli solo al termine dello studio di un capitolo per valutare la preparazione raggiunta.
I test riferiti ad un capitolo sono costituiti da cinque domande a risposta multipla, quelli di riepilogo su tutti gli argomenti del libro sono composti da dieci domande. Entrambi i tipi di test non prevedono alcun vincolo di tempo per la loro soluzione.
Ciascuna domanda di un qualsiasi test prevede cinque possibili risposte, di cui una sola è quella corretta. Una risposta corretta ottiene un punteggio pari a 1, una risposta non data viene valutata 0, una risposta sbagliata -0.25.
Una volta concluso un test, viene fornito dal sistema il punteggio complessivo ottenuto e l'indicazione della correttezza (colore verde) o meno (colore rosso) delle risposte fornite.

Lista dei simboli e delle abbreviazioni

$\mathbb{N}$	insieme dei numeri naturali
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$	insieme dei numeri naturali non nulli
$\mathbb{Z}$	insieme dei numeri interi
$\mathbb{Q}$	insieme dei numeri razionali
$\mathbb{R}$	insieme dei numeri reali
$\mathbb{R}_-$	insieme dei numeri reali negativi
$\mathbb{R}_+$	insieme dei numeri reali positivi
$\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	insieme dei numeri reali non nulli
$I_\delta(x_0)$	intorno circolare di raggio δ del punto x_0
$I_\delta^-(x_0)$	intorno sinistro di raggio δ del punto x_0
$I_\delta^+(x_0)$	intorno destro di raggio δ del punto x_0
$\overset{\circ}{X}$	parte interna dell'insieme X
∂X	frontiera dell'insieme X
X'	derivato dell'insieme X
$\mathrm{dom}\,(f)$	dominio della funzione f
$\mathrm{im}\,(f)$	insieme immagine della funzione f
$G_f\,(f)$	grafico della funzione f
$f^{-1}\,(Y)$	controimmagine dell'insieme Y tramite la funzione f
f^{-1}	funzione inversa della funzione f
f'	derivata prima della funzione f
f''	derivata seconda della funzione f
$f^{(n)}$	derivata n-esima della funzione f
$\int f(x)dx$	integrale indefinito della funzione f
$\int_a^b f(x)dx$	integrale definito della funzione f sull'intervallo $[a,b]$
min	minimo
max	massimo
inf	estremo inferiore
sup	estremo superiore

1

L'insieme dei numeri reali

Il contenuto di questo corso fa continuamente riferimento a grandezze numeriche. In questo capitolo, si richiamano alcuni dei principali aspetti relativi all'insieme dei numeri reali, pur senza approfondire la difficile questione della loro definizione formale.
Il percorso seguito mette in luce i differenti punti di vista con i quali si può considerare l'insieme dei numeri reali: quello *algebrico*, relativo alle operazioni, quello d'*ordine*, relativo al confronto, quello *topologico*, relativo alla vicinanza o meno di punti e insiemi.

1.1 Numeri naturali, interi, razionali

Nei capitoli che seguiranno, tratteremo con variabili e parametri che assumono valori in particolari insiemi numerici. Una introduzione dettagliata e rigorosa di tali insiemi esula dagli scopi di questo testo, quindi ci accontenteremo di alcuni richiami di massima, sufficienti per gli utilizzi successivi. Rapidi richiami sulla teoria elementare degli insiemi si trovano nella **risorsaWEB 1.1**.
Punto di partenza obbligato del nostro percorso è l'*insieme dei numeri naturali*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Su tale insieme sono definite le *operazioni di addizione* e *di moltiplicazione* (che supponiamo siano note a chi legge) nel senso che, per ogni coppia di numeri naturali n_1 e n_2 la loro *somma* $n_1 + n_2$ e il loro *prodotto* $n_1 \cdot n_2$ sono ancora numeri naturali.
Addizione e moltiplicazione godono della *proprietà commutativa*, *associativa*, ammettono *elemento neutro*, 0 per l'addizione, 1 per la moltiplicazione, e la moltiplicazione gode della *proprietà distributiva* rispetto all'addizione. Tuttavia, non esiste in $\mathbb{N}$ l'*opposto* di un numero naturale non nullo, cioè dato un numero naturale $n > 0$, non siamo in grado di risolvere l'equazione di primo grado nell'incognita $x \in \mathbb{N}$: $x + n = 0$.
Su $\mathbb{N}$ è definita una *relazione d'ordine totale* che consente, dati due qualsiasi numeri naturali n_1 e n_2, diversi fra loro, di decidere chi sia il *maggiore* o il *minore*, ossia se

$$n_1 < n_2 \quad \text{oppure} \quad n_1 > n_2.$$

Nel seguito, ove sia opportuno, porremo $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

La possibilità di estendere le nostre "capacità algebriche" si ottiene considerando l'*insieme dei numeri interi:*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, \underbrace{-3, -2, -1}_{\text{negativi}}, 0, \underbrace{+1, +2, +3}_{\text{positivi}}, \ldots\}.$$

Su tale insieme si definiscono le operazioni di addizione e moltiplicazione che godono delle proprietà già menzionate su $\mathbb{N}$; in aggiunta, per ogni $z \in \mathbb{Z}$ non nullo, esiste il suo elemento opposto, ossia la soluzione (unica) dell'equazione $x + z = 0$ nell'incognita $z \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Indicheremo tale soluzione con $-z$.
Identificando i numeri interi positivi con i numeri naturali (ad esempio, l'intero positivo $+3$ con il numero naturale 3), concludiamo che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
Anche $\mathbb{Z}$ è munito di una relazione d'ordine totale, supposta nota a chi legge.
Entrambi gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono detti *insiemi discreti* in quanto, dati due loro elementi, non è garantito che ve ne sia almeno un altro dello stesso insieme fra essi compreso.
Ad esempio, se scegliamo in $\mathbb{N}$ i numeri 16 e 17, fra essi non vi è alcun altro numero naturale.
Nel seguito, ove sia opportuno, utilizzeremo la seguente notazione:

$$\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}\setminus\{0\}\,; \qquad \mathbb{Z}_+ = \{z \in \mathbb{Z} :\ z > 0\}\,; \qquad \mathbb{Z}_- = \{z \in \mathbb{Z} :\ z < 0\}\,.$$

Sull'insieme dei numeri interi (come anche su $\mathbb{N}$) non è definito il *reciproco* di un numero non nullo, cioè la soluzione dell'equazione $zx = 1$ nell'incognita $z \in \mathbb{Z}_0$, eccetto per i casi $z = -1$ oppure $z = 1$. Questo limite può essere superato introducendo un insieme numerico più ampio, più precisamente considerando l'*insieme dei numeri razionali*:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_0,\ m \textit{ ed } n \textit{ primi fra loro} \right\}.$$

Ricordiamo che due numeri interi si dicono *primi fra loro* se non hanno fattori in comune. La richiesta che m ed n siano primi fra loro è indispensabile: come frazione, ad esempio, $6/4$ è differente da $3/2$, ma è chiaro che le due frazioni individuano lo stesso numero.
Identificando le frazioni del tipo $m/1$ con i numeri interi $m \in \mathbb{Z}$, vale l'inclusione $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
Nel seguito, utilizzeremo la seguente notazione:

$$\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q}\setminus\{0\}\,; \qquad \mathbb{Q}_+ = \{q \in \mathbb{Q} :\ q > 0\}\,; \qquad \mathbb{Q}_- = \{q \in \mathbb{Q} :\ q < 0\}\,.$$

Elenchiamo ora alcuni dei principali aspetti dell'insieme dei numeri razionali.

Dati due qualsiasi numeri razionali $q_1 \in \mathbb{Q}$ e $q_2 \in \mathbb{Q}$:

- sono definite l'*operazione di addizione* $(q_1 + q_2)$ e l'*operazione di moltiplicazione* $(q_1 \cdot q_2)$ che godono della proprietà commutativa, associativa, e per le quali esistono elemento neutro e, rispettivamente, elemento opposto e reciproco di un numero non nullo.
  Sintetizzando, diciamo che, rispetto a tali due operazioni, $\mathbb{Q}$ ha la struttura di *campo*;
- come conseguenza del punto precedente, sono definite le *operazioni di:*
  - *sottrazione* $(q_1 - q_2)$, intesa come somma di q_1 con l'opposto di q_2; il risultato $q_1 - q_2$ si dice *differenza* (di q_1 con q_2);
  - *divisione* (q_1/q_2), se $q_2 \neq 0$, intesa come prodotto di q_1 con il reciproco di q_2; il risultato q_1/q_2 si dice *quoziente* (di q_1 per q_2);
- *è sempre possibile operare un confronto*, nel senso che:

  $$q_1 > q_2 \qquad \text{oppure} \qquad q_1 < q_2 \qquad \text{oppure} \qquad q_1 = q_2.$$

  Formalmente, tenendo conto del primo punto, possiamo affermare che $\mathbb{Q}$ è un *campo (totalmente) ordinato*;
- *se $q_1 \neq q_2$, allora esiste almeno un numero razionale q fra essi compreso:* formalmente, diciamo che $\mathbb{Q}$ è un *insieme denso.*
  Infatti, il numero
  $$q = \frac{q_1 + q_2}{2}$$
  soddisfa $q_1 < q < q_2$ ed è un numero razionale, perché somma e quoziente di numeri razionali. L'approccio utilizzato consente agevolmente di determinare infiniti numeri razionali compresi fra q_1 e q_2;
- *se $q_1 \neq q_2$, allora esiste almeno un numero non razionale r fra essi compreso:* l'insieme $\mathbb{Q}$ si dice *discontinuo.*
  Ad esempio, un numero il cui quadrato è uguale a 2 è un numero compreso fra 1 e 2, ma non è un numero razionale (vedi l'Esempio 1.1).

Concludiamo questi brevi richiami introduttivi, soffermandoci sulla *rappresentazione dei numeri razionali.*
Innanzitutto, ricordiamo che si dice **allineamento decimale** una qualsiasi sequenza del tipo (i puntini indicano che ci sono infinite cifre)

$$\alpha, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots$$

ove $\alpha \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_s \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ per ogni $s \in \mathbb{N}_0$.

Il numero α si dice *parte intera* dell'allineamento, la sequenza a destra della virgola *parte decimale.*
Un *allineamento limitato* è un allineamento decimale le cui cifre α_s, da un certo punto in poi, muovendosi verso destra, sono tutte nulle, cioè esiste un indice $\overline{n} \in \mathbb{N}_0$ tale che $\alpha_n = 0$, per ogni $n \geq \overline{n}$.
Si dice *allineamento illimitato periodico*, un allineamento decimale che ammette un numero finito di cifre a destra della virgola che si ripete da un certo punto in poi:

$$\alpha, \underbrace{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}_{\text{antiperiodo}}\underbrace{\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\dots\alpha_s}_{\text{periodo}}\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\dots\alpha_s\,\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\dots\alpha_s\;\dots\;.$$

Ciò premesso, ogni numero razionale può essere visto come un *allineamento decimale limitato* oppure *illimitato periodico.*
Ad esempio, si può facilmente verificare che:

$$\frac{21}{4} = 5,25; \qquad\qquad \frac{12}{7} = 1,\underbrace{714285}_{\text{periodo}}714285714285...$$

Un secondo modo di rappresentare un numero razionale è di tipo geometrico: data una retta, fissiamo un primo punto come *origine* e un secondo punto a destra dell'origine. Al primo punto facciamo corrispondere il numero 0, al secondo punto il numero 1. Il segmento di retta che unisce i due punti ha, per costruzione, *lunghezza unitaria.*
Scelto un qualsiasi numero razionale m/n, con $m \in \mathbb{Z}$ ed $n \in \mathbb{N}_0$, possiamo rappresentarlo sulla retta nel seguente modo: dividiamo il segmento unitario in n parti uguali, riportando poi una di queste parti ottenuto m volte consecutive a partire dall'origine, verso sinistra se m è negativo, verso destra se m è positivo (vedi Figura 1.1).

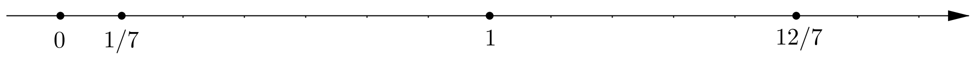

Figura 1.1. Rappresentazione su una retta del numero razionale $q = 12/7$.

Se ogni numero razionale può essere rappresentato come un punto su una retta, non è vero il viceversa: esistono punti di una retta a cui non corrispondono numeri razionali. Formalmente, come già osservato precedentemente, $\mathbb{Q}$ *non è un insieme continuo.*

Esempio 1.1
Consideriamo una retta con fissata l'origine e l'unità di misura e costruiamo il quadrato di lato unitario come in Figura 1.2. Dal teorema di Pitagora, la lunghezza al quadrato della diagonale di tale quadrato è uguale a 2. Geometricamente, mediante un compasso, si può riportare la lunghezza della diagonale sulla retta, individuando un punto ben preciso della retta. Tuttavia, si può dimostrare (**vedi la risorsaWEB 1.2**) che non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia uguale a 2.

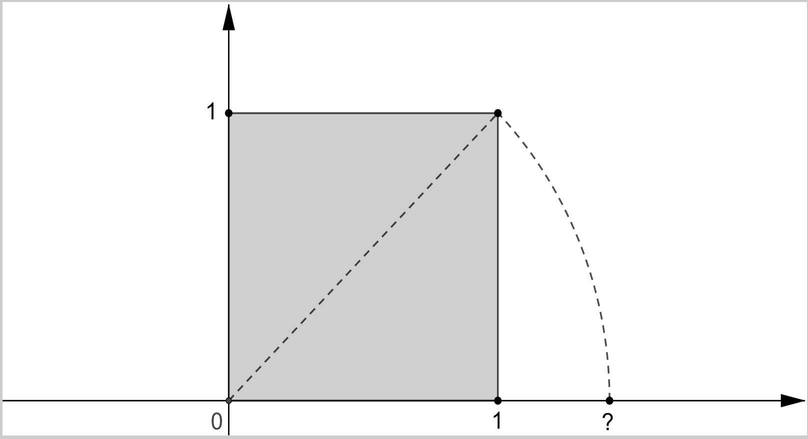

Figura 1.2 La lunghezza della diagonale del quadrato unitario corrisponde ad un punto determinato della retta.

1.2 Numeri reali

Utilizzando la nozione di allineamento decimale introdotta nella sezione precedente, possiamo definire l'insieme dei numeri reali, indicato con $\mathbb{R}$, come l'*insieme di tutti i possibili allineamenti decimali.* In particolare:

- un allineamento limitato oppure illimitato periodico corrisponde ad un numero razionale;
- un allineamento illimitato non periodico si dice **numero irrazionale**.

Possiamo quindi affermare che $\mathbb{R}$ è l'unione di $\mathbb{Q}$ e dell'insieme dei numeri irrazionali[1]. Vale quindi la catena di inclusioni: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Nel seguito, per comodità, utilizzeremo la seguente notazione:

$$\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,; \qquad \mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} :\ r > 0\}\,; \qquad \mathbb{R}_- = \{r \in \mathbb{R} :\ r < 0\}\,.$$

[1] Per il quale non esiste un simbolo apposito...

La definizione introdotta pone un ovvio problema di riconoscimento di un numero irrazionale: se il numero delle cifre dopo la virgola è infinito e non vi è alcuna forma di regolarità (periodicità) come fare a riconoscere l'irrazionalità di un numero data la nostra impossibilità a scrivere tutte le cifre decimali?
La risposta è che non esiste un procedimento universale per stabilire l'irrazionalità di un numero. Segnaliamo, ad esempio, che la dimostrazione dell'irrazionalità del numero di Nepero e risale al 1770, mentre quella di π al 1873.
L'esempio che segue suggerisce un modo per costruire numeri irrazionali.

Esempio 1.2: costruzione di un numero irrazionale

Per generare un numero irrazionale, dobbiamo realizzare un allineamento decimale illimitato senza alcuna periodicità.
Un modo semplice per farlo è quello di utilizzare due sole cifre (ma il ragionamento si estende a casi più generali) in modo da evitare qualunque periodicità.
Ad esempio, scelta una qualsiasi parte intera, diciamo 4, si potrebbero alternare dopo la virgola, un 3 e un numero via via crescente di 5:

$$4,3\underbrace{5}_{1}3\underbrace{55}_{2}3\underbrace{555}_{3}3\underbrace{5555}_{4}3\underbrace{55555}_{5}\dots$$

L'allineamento decimale è illimitato e non può essere periodico, quindi il numero scritto è irrazionale.
Si noti quindi che sinonimo di numero irrazionale non è necessariamente quello di allineamento decimale con le cifre dopo la virgola con andamento irregolare.

1.3 Operazioni fra numeri reali (struttura algebrica)

La complessità della definizione di numero reale si ritrova quando si introducono le operazioni di addizione e moltiplicazione fra numeri reali: ad esempio, come definire l'operazione di addizione quando almeno uno degli addendi è rappresentato da un allineamento decimale illimitato non periodico?
Data la natura introduttiva di questo corso, non affrontiamo la questione: daremo per definite le due operazioni e ci concentreremo sulle proprietà di cui godono.

Sull'insieme dei numeri reali è ben definita l'**operazione di addizione** che, ad ogni coppia di numeri a, $b \in \mathbb{R}$, fa corrispondere un unico numero reale, indicato con $a + b$, detto **somma** *(di a e b)*.

L'operazione di addizione gode delle seguenti *proprietà*:

- ▷ *commutativa*: $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a + b = b + a$
- ▷ *associativa*: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a + (b + c) = (a + b) + c$
- ▷ *esistenza dell'elemento neutro*: $\exists b \in \mathbb{R}: \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad a + b = a$
- ▷ *esistenza dell'opposto*: $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbb{R}: \quad a + c = 0$

L'elemento neutro rispetto all'addizione è 0.
L'esistenza dell'opposto consente di introdurre l'*operazione di sottrazione* che, ad ogni coppia di numeri reali a e b, associa un unico numero reale, indicato con $a - b$, detto *differenza*, ottenuto sommando ad a l'opposto di b:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \qquad a - b := a + (-b) \ .$$

Sull'insieme dei numeri reali è ben definita l'**operazione di moltiplicazione** che, ad ogni coppia di numeri reali a e b, fa corrispondere un unico numero reale, indicato con $a \cdot b$, detto **prodotto** *(di a e b)*.
L'operazione di moltiplicazione gode delle seguenti *proprietà*:

- ▷ *commutativa*: $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \cdot b = b \cdot a$
- ▷ *associativa*: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- ▷ *esistenza dell'elemento neutro*: $\exists b \in \mathbb{R}: \quad \forall a \in \mathbb{R}_0 \quad a \cdot b = a$
- ▷ *esistenza dell'opposto*: $\forall a \in \mathbb{R}_0 \quad \exists c \in \mathbb{R}_0: \quad a \cdot c = 1$

L'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione è il numero 1; il reciproco di un numero reale non nullo a si indica con a^{-1}.
L'esistenza del reciproco consente di introdurre l'*operazione di divisione* che, ad ogni coppia di numeri reali a e b, con $b \neq 0$, associa un unico numero reale, indicato con a/b, detto *quoziente*, ottenuto moltiplicando al numero a il reciproco del numero b:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \ \forall b \in \mathbb{R}_0: \qquad \frac{a}{b} := a \cdot b^{-1} \ .$$

Da quanto detto segue che:

- ▷ per ogni $a \in \mathbb{R}$, risulta $a \cdot 0 = 0$;
- ▷ (*legge di annullamento del prodotto*) per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$
$$a \cdot b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \ \text{ oppure } \ b = 0;$$
- ▷ *non si può dividere un numero reale per* 0 e, in particolare, 0/0 è un'operazione priva di senso.

La compatibilità fra le due operazioni di addizione e moltiplicazione è regolata dalla seguente proprietà:

- *distributiva*: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \qquad a\,(b+c) = ab + ac$

A partire dall'operazione di moltiplicazione si può definire l'operazione di elevamento a potenza: la difficoltà definitoria permane, i dettagli sulle proprietà e le nozioni collegate sono riportate nella **risorsaWEB 1.3.**

1.4 Ordinamento fra numeri reali

Come già fatto a proposito delle operazioni, diamo per acquisita la nozione di relazione d'ordine sugli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.
L'ordinamento sull'insieme dei numeri reali visto come insieme degli allineamenti decimali si può descrivere facilmente senza entrare nei dettagli formali: il confronto fra due allineamenti avviene innanzitutto comparando la loro parte intera, mediante l'usuale ordinamento di $\mathbb{Z}$; dati due numeri reali con ugual parte intera, il confronto avviene poi comparando da sinistra verso destra le corrispondenti cifre delle parti decimali dei due numeri. Illustriamo l'idea con un esempio.

Esempio 1.3
Confrontiamo i due numeri reali

$$a = \sqrt{2}; \qquad\qquad b = \frac{1413}{999}.$$

Per poter utilizzare la definizione, trasformiamo i due numeri in allineamenti decimali:

$$a = 1,414213562...; \qquad\qquad b = 1,414414414414... \,.$$

I due numeri hanno la stessa parte intera e le stesse prime tre cifre decimali, ma la quarta cifra decimale di b è maggiore della corrispondente cifra decimale di a. La conclusione è che $b > a$.
Spinti da un pizzico di curiosità, ci si potrebbe chiedere come si ottengono le cifre dell'allineamento decimale di $\sqrt{2}$: qualche indicazione viene fornita nella **risorsaWEB 1.4**.

L'ordinamento su $\mathbb{R}$ è *totale* (o *completo*), nel senso precisato precedentemente a proposito dell'ordinamento fra numeri naturali. Si può inoltre dimostrare che l'ordinamento introdotto è compatibile con la struttura algebrica, e per questo $\mathbb{R}$ si dice *campo ordinato*, nel seguente senso:

- *compatibilità fra ordinamento e addizione:*

$$\forall x_1, x_2, c \in \mathbb{R} : \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 + c < x_2 + c;$$

- *compatibilità fra ordinamento e moltiplicazione:*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ \forall c \in \mathbb{R}_+ : \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 \cdot c < x_2 \cdot c.$$

Rispetto all'operazione di moltiplicazione, vale la cosiddetta **regola dei segni**:

- *il prodotto di due numeri di segno concorde è un numero positivo;*
- *il prodotto di due numeri di segno discorde è un numero negativo.*

Tale regola si estende facilmente al prodotto di più (di due) numeri.
Sia i numeri razionali, sia i numeri irrazionali sono *densi* in $\mathbb{R}$, ossia fra due qualsiasi numeri reali diversi fra loro è sempre possibile trovare sia un numero razionale, sia un numero irrazionale.
L'insieme dei numeri reali, a differenza di $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, è un *insieme continuo.* Tale proprietà si può esprimere nel seguente modo:

> *se X e Y sono due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$, e $\forall x \in X$ e $\forall y \in Y$ si ha $x \leq y$, allora esiste un elemento $\lambda \in \mathbb{R}$, detto* ***elemento separatore****, tale che $x \leq \lambda \leq y$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$.*

La proprietà di continuità possiede una notevole interpretazione geometrica di cui parleremo nel prossimo paragrafo.
Concludiamo questa sezione con due esempi importanti.

Esempio 1.4: parte intera e frazionaria di un numero reale

Dato un qualsiasi numero reale x, si dice:

- **parte intera** di x, indicata con $[x]$, il massimo numero intero non maggiore di x;
- **parte frazionaria** (oppure **parte decimale** o **mantissa**) di x, indicata con (x), la differenza fra x e la sua parte intera $[x]$:

$$(x) = x - [x]\,.$$

Dalla definizione, segue $0 \leq (x) < 1$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esempio 1.5: modulo di un numero reale
Dato un qualsiasi numero reale $x \in \mathbb{R}$, si definisce *modulo* di x, indicato con $|x|$, il numero stesso, se è non negativo, oppure il suo opposto se x è negativo:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} .$$

Valgono le seguenti *proprietà*:

1. $|x| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$;
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_0, \qquad \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$;
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |x + y| \leq |x| + |y|$ (disuguaglianza triangolare).

1.5 Rappresentazione geometrica dei numeri reali

Abbiamo osservato precedentemente che ogni numero razionale si rappresenta su una retta, mentre non è detto che ogni punto di una retta corrisponda ad un numero razionale. Tale fatto ci ha condotti ad affermare che $\mathbb{Q}$ non è un insieme continuo, nel senso precedentemente introdotto.
La proprietà di completezza di $\mathbb{R}$ consente invece di affermare che:

> *ad ogni numero reale corrisponde un punto su una retta e, viceversa, ad ogni punto di una retta corrisponde un numero reale.*

L'affermazione precedente si può parafrasare dicendo che l'insieme dei numeri reali è in *corrispondenza biunivoca* con i punti di una retta. Per tale motivo, si parla di *retta reale (orientata).*
Grazie all'identificazione di $\mathbb{R}$ con l'insieme dei punti di una retta, è usuale introdurre la corrispondenza fra le idee geometriche di segmento e semiretta con particolari insiemi di numeri reali, detti **intervalli**.
Relativamente ai *segmenti* abbiamo quattro casi, a seconda che i loro *estremi* siano considerati o meno:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \quad a \leq x \leq b\}\,; \qquad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \quad a < x < b\}\,;$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \quad a \leq x < b\}\,; \qquad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \quad a < x \leq b\}\,.$$