

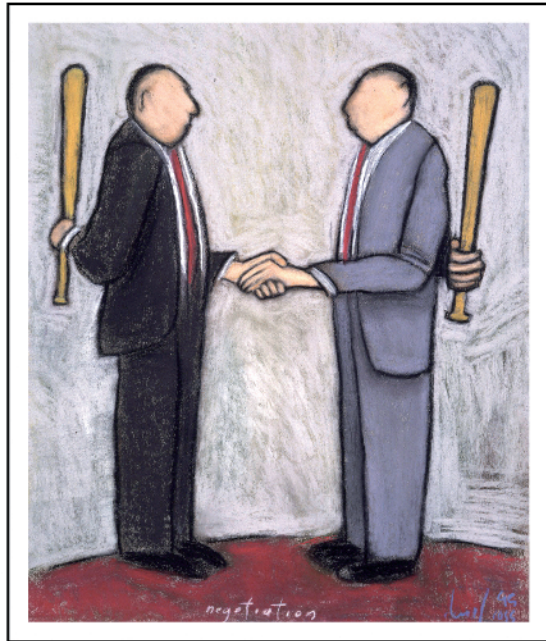
Pierre Dehez

CONFLITTO, CONTRATTAZIONE COOPERAZIONE E POTERE

Introduzione alla teoria dei giochi

Traduzione e cura dell'edizione italiana ad opera di

Pier Mario Pacini



G. Giappichelli Editore

Prefazione

Conflitto, contrattazione, cooperazione e potere sono termini che ricorrono spesso nelle scienze sociali ed alle quali la teoria dei giochi permette di dare sostanza. La teoria dei giochi analizza situazioni in cui attori diversi (individui, imprese, partiti politici, regioni, paesi, ecc.) *interagiscono* in modo diretto, nel senso che i risultati che ciascuno di essi consegue dipendono non solo dalle proprie azioni, ma anche dalle azioni degli altri. È proprio questo legame tra comportamenti individuali e conseguenze collettive che è al centro della teoria dei giochi. Parleremo di giocatori, strategie e payoff. I giocatori hanno preferenze non sulle proprie strategie, ma sui risultati che conseguono dalle strategie adottate da tutti i giocatori, inclusa la loro. Pertanto sarebbe più appropriato parlare di «*teoria delle decisioni in interazione*», piuttosto che di «*teoria dei giochi*», una denominazione che trova le sue origini nell'analisi matematica dei giochi di società iniziata negli anni '20. Vedremo che la teoria dei giochi non serve tanto a fornire delle istruzioni per l'uso e risposte definitive, quanto piuttosto ad offrire dei metodi per analizzare situazioni particolari, organizzare e comprendere ciò che osserviamo.

Le situazioni di gioco tipicamente sono di natura conflittuale, ma non necessariamente antagonista e la cooperazione tra giocatori è tutt'altro che esclusa. Esempi di situazioni strettamente antagoniste sono i giochi di società e, in questi casi, si parla di *giochi a somma nulla*. Tuttavia il funzionamento della società nelle sue dimensioni economica, sociale e politica raramente porta a situazioni a somma nulla; anzi, spesso queste dimensioni sono caratterizzate da un sottile mix di conflitto e convergenza di interessi. Per questo motivo, il funzionamento della società è un campo privilegiato di analisi per la teoria dei giochi. La fissazione dei salari nella contrattazione tra imprese e sindacati, la condivisione dei «benefici della crescita», la risoluzione dei conflitti regionali, la corsa agli armamenti, le politiche monetarie delle banche centrali, le scelte delle imprese in termini di gamma di prodotti, prezzo e capacità produttiva, le aste, la formazione di coalizioni governative... sono tutte possibili illustrazioni, tra le tante.

Spesso la nascita della teoria dei giochi viene ricondotta ad Augustin Cournot ed al suo libro «*Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*», pubblicato nel 1838; la sua analisi del comportamento di due imprese in concorrenza su uno stesso mercato lo portò ad anticipare il concetto di equilibrio di un gioco non cooperativo introdotto nel 1950 da John Nash¹. Viene

¹ Più in generale Cournot è considerato il precursore dell'approccio formalizzato in economia.

spesso fatto riferimento anche a Francis Ysidro Edgeworth ed al suo libro «*Mathematical Physics*», pubblicato nel 1881; la sua analisi delle transazioni stabili in un'economia di puro scambio anticipò il concetto di nucleo di un gioco cooperativo introdotto da Gillies e Shapley nel 1953². Ma lo sviluppo della teoria matematica dei giochi si è avuto nei primi decenni del XX secolo, con i lavori di Zermelo (1912) ed Emile Borel (1921) sui giochi di società, cui hanno fatto seguito gli articoli pionieristici di John von Neumann sui giochi a somma nulla, lavori nei quali si trova il famoso *teorema del minimax*, formulato nel 1928. Ma il vero impulso è stato dato dalla pubblicazione nel 1944 del libro di John von Neumann e Oskar Morgenstern «*Theory of games and economic behavior*». Da lì a poco, nei primi anni 1950, sono usciti i lavori di John Nash e Lloyd Shapley. Successivamente sono seguiti molti lavori e libri, tra cui quello di Duncan Luce e Howard Raiffa «*Games and Decisions*» pubblicato nel 1957, che costituisce ancora oggi un'utile lettura.

La teoria dei giochi è stata inizialmente un campo riservato ai matematici, ma si è progressivamente aperta alle scienze sociali, prima all'economia e poi alle altre scienze sociali – la scienza politica, la sociologia ed il diritto. Attualmente ci sono poche aree della teoria economica in cui la teoria dei giochi non intervenga. Nel corso degli anni sono emersi nuovi concetti e nuovi risultati, accompagnati a volte da sviluppi matematici avanzati, ma anche da intensi dibattiti epistemologici. A questo proposito, in un suo articolo del 1985, Robert Aumann offre una straordinaria analisi epistemologica della teoria dei giochi, accompagnata da un'analisi critica dei concetti fondamentali³, e scrive: «*La mia tesi principale è che un concetto di soluzione debba essere giudicato più per quello che fa che per quello che è, più per la sua capacità di stabilire relazioni e di penetrare il funzionamento dei processi sociali a cui è applicato piuttosto che in base a considerazioni a priori di plausibilità, basate unicamente sulla sua definizione*».

Più recentemente si è sviluppato un approccio sperimentale, all'interno del quale si generano delle osservazioni che successivamente sono utilizzate per valutare i vari concetti ed ipotesi, evidenziandone i limiti ed aprendo nuove strade. In particolare lo stesso concetto di razionalità è stato rivisitato, adottando un nuovo approccio interdisciplinare che unisce psicologia ed economia e che ha dato vita a una nuova disciplina, la *neuroeconomia*⁴.

Negli anni '90, i teorici dei giochi si sono distinti, più o meno con successo, per il contributo che hanno dato al disegno di sistemi di asta per l'aggiudica-

² Terminologia: abbiamo preferito l'uso dei termini inglesi per la maggior parte dei concetti al fine di evitare confusione e anche le tentazioni di originalità...

³ Aumann parla di *comprehension*, un termine al quale attribuisce tre dimensioni: (i) capacità di mettere in relazione strutture diverse, (ii) unificazione di diverse teorie e (iii) semplicità che egli contrappone a «complessità». Questa è una lettura fortemente consigliata (dopo aver digerito il presente libro). Ce ne sono anche altre, tra cui il libro di Christian Schmidt del 2001.

⁴ Si veda il libro di Christian Schmidt del 2010 ed anche il recente libro di Eyal Winter 2014 sulla razionalità delle emozioni.

zione delle frequenze per usi diversi (radio, televisione, telefonia, internet...), soprattutto negli Stati Uniti ed in Europa.

In più occasioni, negli ultimi venti anni, il premio Nobel per l'economia è stato assegnato a studiosi della teoria dei giochi. John Nash⁵ (Università di Princeton), Reinhard Selten (Università di Bonn) e John Harsanyi (Università della California, Berkeley) sono stati insigniti del premio Nobel nel 1994 *per i loro contributi pionieristici nell'analisi degli equilibri nella teoria dei giochi non cooperativi*⁶. Undici anni dopo, nel 2005, Robert Aumann (Università di Gerusalemme) e Thomas Schelling (Università del Maryland) sono stati insigniti *per il loro contributo alla comprensione del conflitto e della cooperazione mediante la teoria dei giochi*. Nel 2007, Leonid Hurwicz (Università del Minnesota), Eric Maskin (Institute for Advanced Study, Princeton) e Roger Myerson (Università di Chicago) sono stati premiati *per aver posto le basi della teoria del disegno dei meccanismi*. Più recentemente, nel 2012, Lloyd Shapley (Università della California, Los Angeles) e Alvin Roth (Università di Stanford) sono stati insigniti *per il loro contributo alla teoria delle allocazioni stabili ed al disegno delle istituzioni di mercato*, legato al famoso «mercato del matrimonio», un problema risolto da David Gale e Lloyd Shapley nel 1962. L'importanza dei contributi di Lloyd Shapley alla teoria dei giochi, in particolare alla teoria dei giochi cooperativi, è stata sottolineata da Robert Aumann nella sua prolusione in occasione del premio Nobel ricevuto nel 2005, parlando di lui come *il più grande teorico dei giochi di tutti i tempi!*

Non posso non riportare un estratto dalla prefazione scritta da Oskar Morgenstern per il libro di Morton Davis (1970): *«La teoria dei giochi è una disciplina nuova che ha suscitato grande interesse per le sue nuove proprietà matematiche e per le sue numerose applicazioni ai problemi sociali, economici e politici. [Ciò] è dovuto al fatto che la struttura matematica della teoria differisce profondamente dai precedenti tentativi di dare basi matematiche ai fenomeni sociali. Questi tentativi erano orientati alle scienze fisiche e ispirati dall'enorme successo che esse hanno avuto nel corso dei secoli. Tuttavia i fenomeni sociali sono diversi: le persone agiscono a volte l'una contro l'altra, a volte cooperano; hanno diversi gradi di informazione l'uno riguardo all'altro e le loro aspirazioni li portano al conflitto o alla cooperazione. Il mondo fisico non ha nessuno di questi tratti. Nello studio del mondo sociale abbiamo bisogno di concetti rigorosi. Dobbiamo dare contenuti precisi a termini quali utilità, informazione, comportamento ottimale, strategia, payoff, equilibrio, contrattazione e molti altri. Senza questi concetti precisi non potremo mai sperare di andare oltre lo stadio di una discussione puramente verbale e la nostra conoscenza, anche ammesso che si arrivi a qualcosa, sarà pur sempre limitata»*. Questa è la visione di uno dei due «padri» della teoria dei giochi ed evidenzia la preoccupazione, cara a von Neumann, di

⁵ John Nash (1928-2015), la cui vita è raccontata nel film *A Beautiful Mind* del 2001.

⁶ Si veda la pagina web nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates.

offrire una formalizzazione matematica specifica per le scienze sociali. Il riferimento alle scienze fisiche allude principalmente alla teoria dell'equilibrio economico generale sviluppata negli anni '50 e legata soprattutto a Kenneth Arrow e Gerard Debreu. Questa teoria, all'epoca, si limitava alla concorrenza perfetta, un assetto in cui non vi è interazione *diretta* tra agenti economici, in particolare le imprese; pertanto, si contrapponeva al lavoro di Joan Robinson (1933) e Edward Chamberlin (1933) che sostenevano la necessità di considerare le imperfezioni della concorrenza, proprio nello spirito della teoria dei giochi, di cui il libro di von Neumann e Morgenstern è stato l'atto di fondazione.

TEORIA DEI GIOCHI: I PRECURSORI

Robert AUMANN (1930)
David GALE (1921-2008)
John HARSANYI (1920-2000)
Harold KUHN (1925-2014)
Duncan LUCE (1925-2012)
Michael MASCHLER (1927-2008)
Oskar MORGENSTERN (1903-1977)
John NASH (1928-2015)
Howard RAIFFA (1924-2016)
Reinhard SELTEN (1930-2016)
Thomas SCHELLING (1921-2016)
David SCHMEIDLER (1939)
Martin SHUBIK (1926-2018)
Lloyd SHAPLEY (1923-2016)
John von NEUMANN (1903-1957)

A questi grandi nomi, dobbiamo aggiungere Augustin COURNOT (1801-1877) e Francis Ysidro EDGEWORTH (1845-1926), l'uno per aver anticipato il concetto di equilibrio non cooperativo e l'altro per aver anticipato il concetto di allocazione stabile nel senso del nucleo.

Le prime versioni di questo testo sono state utilizzate negli ultimi 20 anni come supporto didattico nei miei corsi di introduzione alla teoria dei giochi. Sono particolarmente grato agli studenti *undergraduate* in scienze economiche, sociali e politiche dell'Università di Louvain che mi hanno sopportato anno dopo anno e mi hanno permesso, spesso senza saperlo, di migliorare questo testo che alla fine(!) ho deciso di pubblicare.

La teoria dei giochi ha una formulazione matematica ed alcuni dei suoi sviluppi sono basati su strumenti matematici avanzati; tuttavia, a differenza di altri libri di teoria dei giochi, non chiedo al lettore di padroneggiare questi strumenti⁷. Gli aspetti matematici sono tenuti ad un livello elementare ed un'appendice finale contiene i richiami necessari. Inoltre alcune sezioni, contrassegnate da un asterisco, possono essere tralasciate senza alcun detrimento per la comprensione di quello che segue.

Il Capitolo 1 esamina i giochi non cooperativi. La prima sezione è dedicata alle decisioni individuali, mentre la seconda sezione introduce, mediante alcuni esempi emblematici, i giochi non cooperativi con due giocatori⁸. Le sezioni successive formalizzano i concetti tipici della teoria dei giochi non cooperativi all'interno di due rappresentazioni: la *forma strategica*, in cui i giocatori agiscono simultaneamente, e la *forma estesa*, in cui essi muovono in successione. La ricerca di una soluzione di compromesso in un gioco non cooperativo con 2 giocatori è il tema affrontato nel Capitolo 2. Ciò costituisce un primo passo verso la cooperazione e quest'ultima sarà il tema oggetto di analisi nel Capitolo 3. Questo Capitolo affronta il problema di come dividere i benefici della cooperazione tra tutti i giocatori, partendo dal presupposto che l'utilità sia trasferibile e che gli accordi siano vincolanti. Vengono presentate diverse applicazioni in vari contesti, dal calcolo delle tasse aeroportuali e dei diritti per un brevetto alla ripartizione della responsabilità per un danno prodotto dal concorso di più azioni. Infine il Capitolo 4 è dedicato all'analisi delle regole di votazione e alla conseguente divisione del potere all'interno di organismi deliberativi, con applicazioni in vari contesti quali il Consiglio di Sicurezza dell'ONU ed il Consiglio dei Ministri dell'UE. Questi ultimi due Capitoli possono essere letti indipendentemente dai primi due.

La bibliografia è divisa in due parti. Da una parte un elenco commentato di libri di riferimento e, dall'altra, una lista degli articoli citati nel testo.

Vorrei ringraziare le case editrici Economica e G. Giappichelli per l'efficienza con cui hanno esaminato e migliorato il manoscritto, la prima per quanto riguarda l'edizione francese e la seconda per l'edizione italiana. Vorrei inoltre ringraziare David Ross per avermi permesso di utilizzare l'immagine di copertina di cui egli è l'Autore, un'immagine allegorica che si adatta bene ai temi trattati in questo libro.

⁷ In effetti i libri di teoria dei giochi richiedono una qualche padronanza dello strumento matematico. Il lavoro di Laraki, Renault e Sorin (2014) è un esempio di un libro destinato principalmente agli studenti di matematica.

⁸ Il lettore che voglia andare avanti rapidamente, può limitarsi alla lettura di queste due sezioni e poi saltare direttamente ai capitoli successivi.

Capitolo 1

Strategia e conflitto

Questo primo Capitolo è dedicato allo studio dei giochi *non cooperativi*. Essi si caratterizzano per il fatto che i giocatori non sono vincolati a rispettare eventuali accordi raggiunti prima dell'inizio del gioco. Se tali accordi tra i giocatori sono possibili, sono inclusi nelle strategie che essi hanno a disposizione. Porsi in quest'ottica tuttavia non esclude la possibilità della cooperazione; vedremo infatti che, eccezion fatta per i giochi a somma nulla, le situazioni di gioco spesso comportano un misto di conflitto e di convergenza di interessi. È proprio questo che li rende interessanti.

Ci limiteremo all'analisi di giochi con *due* giocatori, il che, tuttavia, non costituisce una vera limitazione, dal momento che questi giochi contengono tutti gli ingredienti essenziali per lo studio delle difficoltà concettuali che si pongono nei giochi non cooperativi. Per di più ci limiteremo ai giochi in cui l'informazione è *completa*, nel senso che presupporremo che ogni giocatore conosca tutti i dati del gioco, comprese le preferenze del suo avversario. Questa ipotesi certamente limita la portata dell'analisi, ma lo studio dei giochi ad informazione incompleta è concettualmente assai complesso e va oltre gli scopi di questo testo introduttivo.

La prima Sezione è dedicata allo studio del problema della decisione individuale. Qui vengono introdotte e definite le preferenze e la loro rappresentazione in termini di utilità, per poi passare alla formalizzazione del problema di scelta, con particolare attenzione alle scelte in condizioni di incertezza. A questa prima Sezione segue un'introduzione informale ai giochi non cooperativi, mediante alcuni semplici esempi. Nelle Sezioni successive sarà formalizzata l'analisi dei giochi non cooperativi, avendo come punto di riferimento il concetto di equilibrio nel senso di Nash.

1. Preferenze, scelta e incertezza

Preferenze – Scelta – Funzione di utilità – Lotterie – Il paradosso di San Pietroburgo – Utilità attesa – Rappresentazione cardinale – Avversione al rischio

Analizzeremo un decisore che ha a disposizione un insieme di alternative A . Queste alternative non sono necessariamente definite in termini di quantità di denaro;

possono essere panieri di beni, candidati in una elezione, sequenze di alternative distribuite nel tempo o lotterie. L'insieme A può contenere un numero finito o infinito di alternative o anche un continuum, come, ad esempio, nel caso di un intervallo di prezzi.

Preferenze

Il decisore è caratterizzato da preferenze definite su un insieme A di possibili alternative. Adotteremo le seguenti notazioni:

$a \succ b$ egli preferisce l'alternativa a all'alternativa b .

$a \sim b$ egli è indifferente tra l'alternativa a e l'alternativa b .

Nel prosieguo utilizzeremo, come relazione primitiva, la relazione di preferenza *debole* \succsim :

$a \succsim b$ egli preferisce l'alternativa a all'alternativa b o è indifferente tra le due.

Le relazioni di preferenza stretta e di indifferenza possono essere dedotte da quest'ultima nel seguente modo¹:

$a \succ b \Leftrightarrow a \succsim b \text{ e } b \not\sucsim a.$

$a \sim b \Leftrightarrow a \succsim b \text{ e } b \succsim a.$

Supporremo che la relazione di preferenza debole \succsim su A soddisfi le tre seguenti proprietà:

riflessività: per ogni alternativa $a \in A$, $a \succsim a$.

transitività: se $a, b, c \in A$ sono tali che $a \succsim b$ e $b \succsim c$, allora $a \succsim c$.

completezza: per tutte le coppie $(a, b) \in A \times A$, $a \succsim b$ o $b \succsim a$.

La proprietà di riflessività è banale, ma è necessario esplicitarla. La proprietà di transitività è un'ipotesi di *razionalità* che impone che le preferenze del decisore siano coerenti². Le osservazioni empiriche mostrano che la transitività è spesso violata quando i decisori devono compiere scelte in successione; tuttavia essi riconoscono il proprio errore quando ne diventano consapevoli e cercano di correggerlo. La completezza impone una restrizione assai più forte, perché richiede che il decisore sia sempre in grado di dire se preferisca un'alternativa ad

¹ Il simbolo \Leftrightarrow significa «se e solo se».

² Una relazione binaria che soddisfa le proprietà di riflessività e transitività costituisce un *pre-ordinamento*. La relazione \geq definita sull'insieme dei numeri reali è un *ordinamento*, in quanto soddisfa anche la proprietà di *simmetria*: $x \geq y$ e $y \geq x$ implicano $x = y$.

un'altra o se sia indifferente tra le due, qualunque sia la complessità di queste due alternative. Bisogna fare attenzione a non confondere «indifferenza» con «incapacità di scegliere»: l'indifferenza significa semplicemente che il decisore accetta che possa essere una persona terza o un meccanismo aleatorio a decidere per lui.

Scelta

Formalmente una *struttura di scelta* è definita da una coppia (A, \succsim) formata da un insieme di alternative A sul quale è definita una relazione di preferenza \succsim . Non necessariamente tutte le alternative sono realizzabili e ciò dipende dal contesto in cui il decisore si trova ad operare: un contesto particolare è rappresentato da un sottoinsieme $B \subset A$ di alternative. L'esempio tipico è il vincolo di bilancio di un consumatore: egli dispone di un certo reddito per l'acquisto di beni, ognuno dei quali ha un prezzo. L'insieme dei panieri di beni il cui valore non eccede il suo reddito costituisce il contesto nel quale il consumatore si trova ad operare; evidentemente, esso è un sottoinsieme dell'insieme dei panieri di beni possibili.

A ciascun contesto $B \subset A$ è associato l'*insieme di scelta* $C(B) \subset B$, il quale individua le alternative che il decisore ritiene *migliori* tra tutte quelle realizzabili, ovvero:

$$a^* \in C(B) \quad \text{se} \quad a^* \succsim a \quad \text{per ogni} \quad a \in B.$$

Equivalentemente, $C(B)$ è il sottoinsieme delle alternative realizzabili rispetto alle quali nessun'altra risulta preferita:

$$a \succ a^* \quad \text{implica} \quad a \notin B.$$

Abbiamo definito $C(B)$ come un insieme, in quanto non si può escludere che ci siano più alternative che soddisfano il criterio di ottimalità. Ma allora quale sceglierà? Dovremmo definire un meccanismo di selezione, ma d'altra parte ciò non è nemmeno importante, perché il decisore è di fatto *indifferente* tra tutte quelle alternative. Se $C(B)$ fosse un punto isolato per ogni B , allora $C(B)$ sarebbe una funzione, chiamata *funzione di scelta*; se invece contiene più alternative per qualche B , allora $C(B)$ sarebbe una *funzione multivoca* (o *polidroma*), chiamata *corrispondenza di scelta*.

Funzione di utilità

Tutto sarebbe sicuramente più agevole se potessimo riportare il confronto tra due alternative (che possono essere anche molto complicate) al confronto (più familiare) tra due numeri reali. Diremo che una relazione di preferenza \succsim è rappresentata da una funzione u se è possibile associare a ciascuna alternativa $a \in A$ un numero reale $u(a)$ tale che

$$a \succsim b \quad \Leftrightarrow \quad u(a) \geq u(b).$$

In questa maniera viene definita una funzione a valori reali $u : A \rightarrow \mathbb{R}$, detta *funzione di utilità*. Automaticamente essa soddisfa le seguenti due proprietà:

$$\begin{aligned} a \succ b &\Leftrightarrow u(a) > u(b), \\ a \sim b &\Leftrightarrow u(a) = u(b). \end{aligned}$$

Però bisogna fare attenzione: la frase «*l'utilità di a è maggiore dell'utilità di b* » può indurre un'errata comprensione del concetto di funzione di utilità. Una funzione di utilità, di per sé, non ci dà nessuna informazione aggiuntiva sulle preferenze e, difatti, non esiste un unico modo di rappresentarle: se la funzione u rappresenta la relazione di preferenza \succsim , allora anche la funzione $v = T(u)$, ottenuta mediante una trasformazione *crescente* T di u , rappresenta la stessa relazione³. Infatti, se $v(a) = T(u(a))$, le seguenti relazioni sono rispettate

$$a \succsim b \Leftrightarrow u(a) \geq u(b) \Leftrightarrow v(a) \geq v(b).$$

Per questo motivo si parla di rappresentazione *ordinale* delle preferenze; il confronto tra *differenze di utilità* non ha alcun significato, conta solo il *segno* della differenza.

Quando l'insieme A delle alternative è finito, è facile associare una funzione di utilità ad ogni pre-ordinamento completo. Prendiamo il caso di un insieme di quattro alternative $A = \{a, b, c, d\}$ e supponiamo che le preferenze siano tali che $a \succ b \sim c \succ d$; purché siano coerenti con le preferenze, i numeri per rappresentarle possono essere scelti arbitrariamente, ad esempio $u(a) = 9$, $u(b) = u(c) = 0$ e $u(d) = -3$. Ma andrebbe ugualmente bene qualsiasi altra sequenza di numeri purché il numero più grande sia associato ad a , il numero più piccolo a d ed uno stesso numero, compreso tra i precedenti due, alle alternative b e c .

In termini più generali si procede in tre passi. Innanzitutto le alternative tra le quali il decisore è indifferente vengono raccolte in *classi di equivalenza*; dopo di che queste classi di equivalenza sono messe in ordine decrescente di preferenza ed, infine, a ciascuna di esse viene attribuito un numero reale in modo da rispettare l'ordine di preferenza. Questi argomenti possono essere estesi per dimostrare, senza ipotesi aggiuntive, che una funzione di utilità esiste anche nel caso in cui l'insieme delle alternative sia un infinito numerabile.

Tuttavia, se l'insieme delle alternative non è numerabile, ma è un continuo, un pre-ordinamento di preferenza non è necessariamente rappresentabile mediante una funzione di utilità. In questo caso, per garantire l'esistenza di una funzione di utilità, è necessario introdurre un'ulteriore ipotesi: la *continuità*. Essa richiede che gli insiemi $\{x \in A \mid x \succsim y\}$ e $\{x \in A \mid y \succsim x\}$ siano *chiusi*⁴, qualsiasi sia l'alternativa $y \in A$. Tale ipotesi è sufficiente a garantire che la funzione di utilità sia continua, come asserito nella seguente Proposizione (Debreu (1954)):

³ Una trasformazione T è *crescente* se e solo se $x > y$ implica $T(x) > T(y)$. La trasformazione $T(x) = x^3$ è un esempio di trasformazione crescente, mentre la trasformazione $T(x) = x^2$ non lo è.

⁴ Un sottoinsieme è chiuso se contiene tutti i punti della sua frontiera.

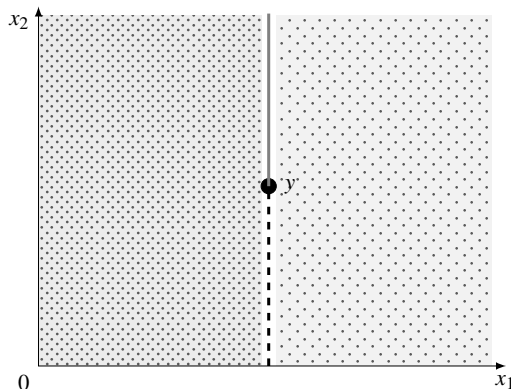
Proposizione 1.1. *Ogni pre-ordinamento completo e continuo può essere rappresentato da una funzione di utilità continua⁵.*

Il *pre-ordinamento lessicografico* (che in realtà è un ordinamento) definito sull'insieme \mathbb{R}^n è un esempio di una relazione di preferenza che non è continua. Le alternative hanno la forma (x_1, x_2, \dots, x_n) e le preferenze sono definite seguendo un ordine di priorità. Se seguiamo l'ordine naturale (ossia il primo elemento ha la priorità più alta, seguito dal secondo e così via fino all'ultimo che ha la priorità più bassa), x è preferito a y se:

$$x_1 > y_1 \text{ o } [x_1 = y_1 \text{ e } x_2 > y_2] \text{ o } [x_1 = y_1, x_2 = y_2 \text{ e } x_3 > y_3] \text{ o } \dots x_n > y_n.$$

Si osservi che due n -uple x e y sono indifferenti *se e solo se* $x = y$, per cui le classi di equivalenza sono punti isolati: $x \sim y$ se e solo se $x = y$. Come si può vedere nella Figura 1.1, per ogni dato $y \in \mathbb{R}_+^2$, gli insiemi $\{x \in \mathbb{R}_+^2 | x \succsim y\}$ e $\{x \in \mathbb{R}_+^2 | y \succsim x\}$ non sono chiusi: la frontiera del primo include solo la parte più marcata della linea verticale passante per y ; la frontiera del secondo include solo la parte tratteggiata della stessa linea. Quindi l'ordinamento lessicografico non ammette una rappresentazione in termini di funzione di utilità⁶.

Figura 1.1 – *Preferenze lessicografiche*



Si consideri una struttura di scelta (A, \succsim) in cui la relazione di preferenza \succsim è rappresentata da una funzione di utilità u sull'insieme A . Per quanto visto, possiamo lavorare indifferentemente anche con la coppia (A, u) ed il problema di scelta associato ad un contesto $B \subset A$ si riduce alla *massimizzazione* della funzione u sull'insieme B

$$a^* \in C(B, u) \Leftrightarrow u(a^*) \geq u(a) \text{ per ogni } a \in B.$$

⁵ Dal punto di vista strettamente formale, questa Proposizione è valida per insiemi di alternative che sono sottoinsiemi connessi di \mathbb{R}^n .

⁶ In Appendice, pag. 85, è riportata la dimostrazione di questa Proposizione, per il caso $n = 2$.

Le soluzioni alla massimizzazione di una funzione coincidono con le soluzioni alla massimizzazione di tutte le sue trasformazioni crescenti; pertanto, quando si usa l'espressione «massimizzare l'utilità» facciamo riferimento esclusivamente alle preferenze sottostanti. La funzione di utilità non è niente di più che un «ausilio» introdotto per semplificare l'analisi dei problemi di scelta.

Lotterie

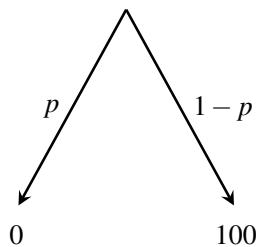
Si consideri un insieme numerabile (finito o infinito) di alternative, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_j, \dots\}$, sul quale è definita una distribuzione di probabilità $p = \{p_1, p_2, \dots, p_j, \dots\}$, dove p_j indica la probabilità che l'alternativa a_j si verifichi. Si indichi con Δ_n l'insieme di queste distribuzioni di probabilità:

$$\Delta_n = \{p = (p_1, p_2, \dots, p_j, \dots) \mid 0 \leq p_j \leq 1 \text{ e } \sum p_j = 1\}.$$

Ogni distribuzione di probabilità sull'insieme A definisce una *lotteria* e Δ_n è l'insieme delle lotterie su quell'insieme. Δ_n ha dimensione $n - 1$, in quanto l'identità $\sum p_j = 1$ deve essere comunque rispettata. Se le alternative sono rappresentate da numeri reali (as esempio somme di denaro), una lotteria è una *variabile aleatoria discreta a valori reali*⁷.

Ad esempio, si consideri il caso $A = \{0, 100\}$. Una lotteria su A è definita dalla probabilità $p_1 = p$ di ottenere 0, con $0 \leq p \leq 1$; conseguentemente, $p_2 = 1 - p$ è la probabilità con cui si ottiene il premio 100. Questa è una *lotteria semplice* e la indicheremo con $L = (p|0, 100)$. In questo caso, l'insieme delle lotterie semplici può essere identificato con l'intervallo $[0, 1]$. La lotteria $L = (p|0, 100)$ è rappresentata nella Figura 1.2.

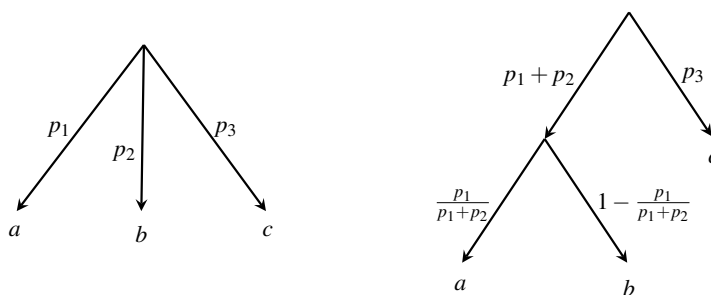
Figura 1.2 – *Lotteria semplice*



Lotterie con più di due premi possono essere rappresentate come combinazioni di lotterie semplici. Ciò è illustrato nella Figura 1.3 per il caso di una lotteria definita sull'insieme $A = \{a, b, c\}$ con $p_3 = 1 - p_1 - p_2$.

⁷ Il concetto di lotteria si estende senza problemi anche al caso in cui vi sia un insieme continuo di alternative. Se le alternative sono numeri reali, allora tali lotterie sono variabili aleatorie continue a valori reali.

Figura 1.3 – Lotterie composte



La prima lotteria può essere rappresentata come una lotteria composta da due lotterie semplici in successione e può essere scritta come

$$L = \left(p_1 + p_2 \left| L \left(\frac{p_1}{p_1 + p_2} \mid a, b \right) c \right. \right).$$

Il primo criterio a cui si pensa quando si devono confrontare lotterie i cui premi sono rappresentati da numeri reali, come nel caso di somme di denaro, è il *valore atteso* o *aspettativa matematica* o, più comunemente, «*media*». Esso è data dalla somma dei risultati ponderati con le rispettive probabilità di accadimento:

$$E = \sum_{j=1}^n p_j x_j.$$

Il valore atteso della lotteria $L(\frac{1}{2} \mid 0, 100)$ è pari a 50. Da questo punto di vista essa è equivalente alla lotteria $L(\frac{3}{4} \mid 0, 200)$, ma peggiore della lotteria $L(\frac{2}{3} \mid 0, 200)$.

Il racconto che segue viene spesso citato per mostrare che il criterio del valore atteso non è appropriato per il confronto tra lotterie.

Il paradosso di San Pietroburgo

Nel 18° secolo, il Casinò di San Pietroburgo era noto per accettare qualsiasi lotteria, purché la direzione del Casinò potesse fissare il prezzo da pagare per parteciparvi. Tuttavia la fissazione del prezzo per la seguente lotteria pose qualche problema: una moneta viene lanciata ripetutamente finché non esce «croce»; se ciò succede dopo n lanci, al giocatore viene pagato un premio pari a 2^n monete. Ciò dà luogo ad una variabile casuale con un insieme numerabile di possibili valori $\{2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots\}$, ad ognuno dei quali è associata una probabilità pari a $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\}$ rispettivamente. Infatti i lanci sono eventi indipendenti e la

probabilità che esca croce in un lancio qualsiasi è pari a $\frac{1}{2}$, per cui la probabilità che si debbano fare n lanci è pari a $(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2^n}$. Di conseguenza l'aspettativa matematica per questa lotteria è infinita:

$$E = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} 2^j = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty.$$

Pertanto, in base al criterio del valore atteso, ogni giocatore dovrebbe essere disposto a pagare somme considerevoli per avere la possibilità di partecipare a questa lotteria, il che evidentemente non ha molto senso. Voi quanto sareste disposti a pagare?

Questo problema ha appassionato gli studiosi del tempo, in particolare Daniel Bernouilli (1700-1782) che ebbe l'idea di distinguere tra il valore «fisico» della moneta ed il suo valore «morale»: il valore (l'utilità) che si attribuisce ad un aumento della ricchezza è tanto minore quanto maggiore è il livello di ricchezza da cui si parte⁸. Questo è il principio dell'*utilità marginale decrescente*, tanto caro agli economisti. Più precisamente, Bernouilli ipotizzò che l'incremento di utilità derivante da un incremento della ricchezza fosse *inversamente proporzionale* alla ricchezza iniziale:

$$\Delta u = \frac{1}{x} \Delta x$$

ovvero, in termini di variazioni infinitesimali,

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Ciò equivale a dire che l'utilità della ricchezza è uguale al suo *logaritmo* naturale. Il criterio non è più il valore atteso delle vincite, ma piuttosto il valore atteso del logaritmo delle vincite. Se lo applichiamo al testa o croce visto in precedenza, il valore atteso è finito (e ragionevole)⁹:

$$E = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} (\log 2^j) = (\log 2) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} j \simeq 1.39.$$

Ciò fa di Bernouilli il precursore del concetto di utilità attesa, formalizzato più tardi da von Neumann e Morgenstern nel 1944, che esamineremo nella prossima sezione.

Naturalmente si tratta di un esempio estremo, in quanto prende in considerazione una variabile casuale che non ha una media. Per il lettore che non sia convinto, ecco un altro esempio, più semplice. Prendiamo due lotterie: $L(\frac{1}{2}|0, 200)$ e

⁸ Daniel è il fratello minore di Nicolas, il padre della distribuzione che porta il suo nome.

⁹ Si utilizza l'identità $\log 2^k = k \log 2$ ed il fatto che $\log 2 = 0.693$. Quanto alla serie, essa converge (rapidamente) verso 2.

$L(\frac{99}{100}|0, 10000)$. Entrambe hanno lo stesso valore atteso, ossia 100, ma non sono equivalenti. Se, come succede per la maggior parte di noi, si preferisce la prima lotteria, che sembra «meno rischiosa», si mostra di avere *avversione al rischio*. Se, al contrario, si preferisce la seconda, si mostra di avere «propensione al rischio»; questo è il caso, ad esempio, di coloro che giocano al lotto, ma, allora, siamo in un contesto diverso, in cui la razionalità lascia il posto agli auspici ed alle emozioni.

Utilità attesa

Abbiamo visto che i premi in una lotteria non sono necessariamente importi monetari. Inoltre, le componenti di una lotteria possono essere a loro volta lotterie. Pertanto, se le preferenze sono definite sulle lotterie, possiamo estendere alle lotterie i concetti di scelta e funzione di utilità. Allora il problema che ci poniamo è il seguente: è possibile caratterizzare le preferenze sulle lotterie a partire dalla conoscenza delle preferenze sulle loro componenti? Questo è l'oggetto della seguente Proposizione, nota come il *teorema dell'utilità attesa*, dovuta a von Neumann e Morgenstern (1944).

Proposizione 1.2. *Tra tutte le funzioni di utilità che rappresentano le preferenze sulle lotterie, esiste una funzione di utilità u tale che la lotteria $(p|a, b)$ è preferita alla lotteria $(q|a, b)$ se e solo se l'utilità attesa della prima è maggiore dell'utilità attesa della seconda, ossia*

$$pu(a) + (1 - p)u(b) > qu(a) + (1 - q)u(b).$$

Per ottenere questo risultato si richiede, oltre all'ipotesi di continuità, necessaria per garantire la rappresentabilità dei pre-ordinamenti di preferenza mediante una funzione di utilità, solo un'ipotesi aggiuntiva, ovvero:

Date due lotterie L' e L'' tali che $L' \succsim L''$, allora $(p|L', L) \succsim (p|L'', L)$ per ogni probabilità p , $0 \leq p \leq 1$, qualsiasi sia la lotteria «parassita» L .

Questa è una *condizione di indipendenza*: l'intervento di una terza lotteria L non deve influenzare le preferenze relative alle lotterie L' e L'' . Per quanto riguarda l'ipotesi di continuità, nel presente contesto essa può essere ridefinita nel seguente modo: prese tre qualsiasi alternative a , b e c tali che $a \succsim b \succsim c$ esiste una probabilità p tale che $b \sim (p|a, c)$ ¹⁰.

¹⁰ La dimostrazione della Proposizione 1.2 è abbastanza complicata, ma si semplifica se si accetta l'ipotesi che l'insieme delle lotterie contenga due elementi (lotterie) uno dei quali è considerato migliore di tutti gli altri e l'altro peggiore di tutti gli altri nelle preferenze individuali; per una dimostrazione della Proposizione 1.2 con questa ipotesi addizionale si veda ad esempio Varian (1992, pp 174-175)