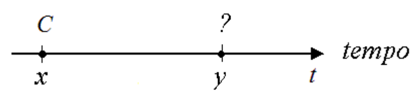
CAPITOLO 1

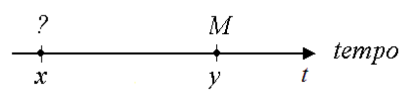
Operazioni Finanziarie Elementari

1. Regimi finanziari, traslabilità

La *Matematica Finanziaria* si occupa della definizione dei termini di scambio fra importi monetari disponibili in epoche diverse:



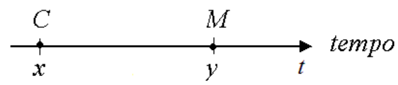
Se un soggetto riceve oggi ($t = x$) un capitale in prestito di importo C, quanto dovrà versare, ossia restituire fra due anni ($t = y$)?
Questo è un tipico problema della matematica finanziaria detto "*problema di capitalizzazione*".
Un soggetto dovrà riscuotere fra due anni ($t = y$) la somma M, ma cerca qualcuno che gliela anticipi (o sconti) oggi ($t = x$), quanto prenderà?



Questo è un secondo problema tipico della matematica finanziaria, detto "*problema di anticipazione" o "di sconto" o "di attualizzazione"*.

Si definisce Operazione Finanziaria (OF) ogni operazione relativa all'impiego di capitali monetari. Un'*operazione finanziaria elementare* è rappresentata dallo scambio tra due individui, A e B, di due capitali diversi:

- il soggetto **A** cede a **B** il capitale **C** disponibile al tempo **x**
- in cambio **B** cede ad **A** il capitale **M** disponibile al tempo $\mathbf{y} > \mathbf{x}$



Ogni operazione finanziaria avviene tra due operatori economici, ciascuno dei quali assume un impegno finanziario; se lo scambio viene accettato dalle due parti mediante un accordo, diremo che secondo tale accordo i due capitali (C, x) e (M, y), ossia C al tempo x ed M al tempo y, sono *finanziariamente equivalenti* fra loro o che l'operazione è equa.
Se l'accordo è libero e se i due individui od operatori raggiungono l'accordo, si può ritenere che lo scambio porti un beneficio ad ambedue i soggetti: per A è preferibile possedere M alla data y in luogo di C alla data x e viceversa, per B è preferibile possedere C alla data x in luogo di M alla data y.

- se $x = y$ deve risultare $C = M$,
- se $y > x$ assumiamo (per ora) $M \geq C$.

La *Matematica Finanziaria classica* in senso stretto, o Teoria del Credito, si occupa delle valutazioni in ambito certo.

La *Matematica Attuariale* si occupa invece di valutazioni di prestazioni condizionate a certi eventi, o operazioni finanziarie aleatorie (per esempio contratti di assicurazione, pensioni, vitalizi, etc.).

Parliamo di *Operazione Finanziaria di Investimento, o di Capitalizzazione,* quando l'elemento fondamentale della transazione è l'importo C, disponibile alla data iniziale x, e ciò che va determinato è l'importo M, e ci interessa quindi valutare "*l'interesse maturato dal capitale C*".

Dati noti: Capitale iniziale C, tempo iniziale x, tempo finale y;
Dato da determinare: Capitale al tempo finale o Montante, M.
Definiamo

$$Interesse = I = M - C \tag{1.1}$$

Parliamo di *Operazione Finanziaria di Anticipazione, o Sconto,* quando l'elemento fondamentale della transazione è l'importo M (capitale al tempo y) mentre il capitale iniziale C va determinato, e ci interessa valutare "*lo sconto effettuato sul montante M*".

Dati noti: Capitale finale M, tempo iniziale x, tempo finale y;
Dato da determinare: Capitale al tempo iniziale, C.
Definiamo

$$Sconto = D = M - C \tag{1.2}$$

Sulla base della teoria del credito si assume che l'impiego del capitale C per un certo periodo $y - x > 0$ permette l'aumento del capitale stesso:

$$M - C \geq 0$$
$$M - C = I = D$$

Se $x = y$ avremo che $M = C$ e quindi $I = D = 0$.

- I è l'interesse prodotto nel periodo considerato $(y-x)$ dal capitale iniziale C;
- D è lo sconto effettuato sulla somma M per il suo anticipo relativo al periodo $(y - x)$.

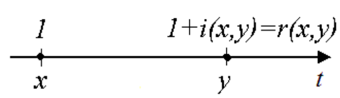
Definiamo *tasso effettivo di interesse relativo al periodo considerato,* $i(x, y)$, l'interesse per unità di capitale impiegato, dato dal rapporto:

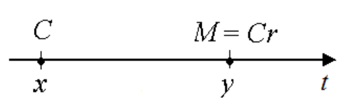
$$i(x, y) = \frac{I}{C} = \frac{M - C}{C} = \frac{M}{C} - 1 \tag{1.3}$$

così che gli interessi maturati da un capitale C sono dati da $I = i(x, y)C$.

Definiamo *fattore di capitalizzazione,* $r(x, y)$, il montante per unità di capitale impiegato, dato dal rapporto $\frac{M}{C}$:

$$r(x, y) = \frac{M}{C} = 1 + i(x, y) \tag{1.4}$$





Considerando il fattore di capitalizzazione r possiamo scrivere il montante M in funzione del capitale C e del tasso d'interesse. Da $\frac{M}{C} = r$ si ha:

$$M = Cr = C(1 + i)$$

Definiamo *tasso effettivo di sconto relativo al periodo considerato,* $d(x, y)$, lo sconto per ogni unità di montante, dato dal rapporto:

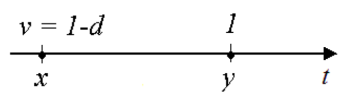
$$d(x, y) = \frac{D}{M} = \frac{M - C}{M} = 1 - \frac{C}{M} \tag{1.5}$$

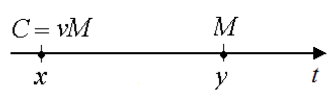
così che lo sconto su un montante M è dato da $D = d(x, y)M$.

Definiamo *fattore di anticipazione (o di sconto o coefficiente di attualizzazione),* $v(x, y)$, il valore in x corrispondente ad una unità di montante in y, dato dal rapporto $\frac{C}{M}$:

$$v(x, y) = \frac{C}{M} = 1 - d(x, y) \tag{1.6}$$

Analogamente a quanto fatto nel caso del fattore di capitalizzazione,





nel caso del fattore di anticipazione possiamo esprimere il capitale iniziale C in funzione del montante M e del tasso di sconto d. Da $\frac{C}{M} = v$ si ha:

$$C = vM = (1 - d)M$$

Quando tali grandezze sono relative alla medesima operazione finanziaria (di investimento o di anticipazione) abbiamo:

$$\frac{M}{C} = r = \frac{1}{v} \tag{1.7}$$

troviamo così una relazione fra tutte e quattro le grandezze appena introdotte (in cui omettiamo, per semplificare la notazione, il periodo $t = (y - x)$ a cui si riferiscono):

$$r = 1 + i = \frac{1}{v} = \frac{1}{1-d} \tag{1.8}$$

Come vedremo due leggi si diranno **coniugate** se vale, per ogni periodo, la relazione

$$rv = 1 \tag{1.9}$$

da cui seguono le relazioni esistenti tra le quattro grandezze finanziarie descritte sopra.
Da tale relazione si deduce che data una qualunque delle quattro grandezze è sempre possibile ricavare le altre tre:

$$i = r - 1 = \frac{1}{v} - 1 = \frac{1}{1-d} - 1 \rightarrow i = \frac{d}{1-d} \tag{1.10}$$

$$i = \frac{d}{1-d} \rightarrow i(1-d) = d \rightarrow d = \frac{i}{1+i} \tag{1.11}$$

Anche se tutte deducibili immediatamente dalle relazioni fondamentali date in (1.8) o (1.9) , possiamo riportare queste relazioni in una matrice in cui ogni riga evidenzia la dipendenza di ciascuna grandezza da tutte le altre:

	(**i**)	(**r**)	(**d**)	(**v**)
i =		$r-1$	$\frac{d}{1-d}$	$\frac{1-v}{v}$
r =	$1+i$		$\frac{1}{1-d}$	$\frac{1}{v}$
d =	$\frac{i}{1+i}$	$\frac{r-1}{r}$		$1-v$
v =	$\frac{1}{1+i}$	$\frac{1}{r}$	$1-d$	

e vedremo in seguito come tali relazioni restano valide in operazioni finanziarie più generali, in funzione del tempo. Dalla (1.11) si vede anche che per ogni operazione finanziaria (ed un medesimo periodo di riferimento) il tasso effettivo di interesse, i, è sempre maggiore del tasso effettivo di sconto, d, corrispondente:

$$d < i$$

Inoltre, d è funzione crescente di i (si veda la figura 1.1). Intuitiva-

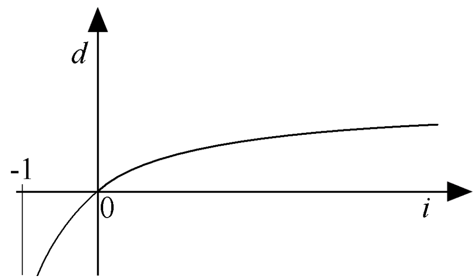


FIGURA 1. *Relazione fra d ed i*

mente, se il tasso d'interesse cresce il denaro rende di più e quindi per ottenere lo stesso montante M finale basta l'impiego di una somma iniziale $C^{'}$ più piccola: $M - C^{'} = D^{'}$ con $D^{'} > D$, aumentando lo sconto aumenta anche il tasso effettivo di sconto d (ossia il tasso di sconto d cresce poichè più costa il capitale, più costa rinunciare ad usarlo).

1.1. Leggi e regimi finanziari. Un'operazione finanziaria, brevemente OF, viene considerata sulla base della durata (determinata dalla differenza dei due tempi, $y-\ x$) e dei capitali coinvolti (C ed M). In particolare, al variare del capitale impiegato, un'operazione finanziaria non richiede alcuna modifica nelle formule introdotte fino ad ora (in una OF di capitalizzazione tutte le espressioni dipendono esplicitamente da C, in una OF di attualizzazione tutte dipendono da M). Mentre la dipendenza dell'operazione finanziaria dalla durata non è stata ancora analizzata. Nella maggior parte delle operazioni finanziarie è l'investitore che decide la durata dell'investimento o del prestito. Pertanto, al variare della durata le grandezze descritte precedentemente, interesse I, montante M, sconto D, fattore di capitalizzazione $r(x, y)$ e di attualizzazione $v(x, y)$, tasso d'interesse $i(x, y)$ e di sconto $d(x, y)$, assumeranno valori diversi.
La notazione adottata fino ad ora tiene conto dell'istante iniziale dell'OF, x, e dell'istante finale dell'OF, y, ma non esplicita il tipo di relazione esistente tra tali grandezze e la durata dell'operazione che in seguito verrà anche indicata con $t = (y - x)$. Vediamo ora come si possa determinare la dipendenza dal tempo di tali grandezze.

1.2. Regimi Finanziari di Capitalizzazione. Come si è detto, supponiamo di disporre di un importo C al tempo iniziale $t = 0$, si vuol determinare, al variare del tempo t (durata dell'impiego) la quantità M_t (montante al tempo t) ritenuta equivalente in t al capitale iniziale C. È ragionevole supporre che esista una funzione continua

$$M_t = f\left(C, t\right) \tag{1.12}$$

che soddisfi le seguenti proprietà, o assiomi, che rappresentano il comportamento di un individuo razionale (per semplicità assumiamo che un individuo razionale sia colui che "*preferisce tanto a poco*").

Il montante sia rappresentato da una *funzione omogenea* di primo grado rispetto a C o, equivalentemente, chiediamo che la funzione f sia lineare rispetto a C, in quanto è ragionevole supporre che se in $t = 0$ disponiamo dell'importo $C_1 + C_2$, allora al tempo t il montante sarà

$$f\left(C_1 + C_2, t\right) = f\left(C_1, t\right) + f\left(C_2, t\right) \tag{1.13}$$

Si può scrivere, quindi, $f\left(C, t\right) = C\ f\left(1, t\right)$, e

$$M_t = C\ f\left(1, t\right) \tag{1.14}$$

dove la "*funzione intensiva*", $f(1, t)$, che rappresenta il montante in t equivalente al capitale $C = 1$ in $t = 0$, viene usualmente indicata con $r(t)$ (in cui si omette di evidenziare che il capitale a cui si riferisce è il capitale unitario, assumendolo come sottintéso) e viene detta "*funzione fattore di montante*" ad un tempo. Sarà

$$M_t = C\ r(t) \tag{1.15}$$

con $r(t)$ funzione continua di t, per $t \geq 0$, e tale che

$$r(0) = 1 \tag{1.16}$$

È ragionevole chiedere che valga anche un'altra proprietà: *la monotonia rispetto a t*. È chiaro, infatti, che il valore M_t (che riteniamo equivalente a C in $t = 0$) cresce (o almeno non diminuisce) all'aumentare di t.

Assumiamo quindi che

$$t_1 < t_2 \longrightarrow M_{t_1} \leq M_{t_2}$$

ossia in termini di fattore di montante:

$$t_1 < t_2 \longrightarrow r(t_1) \leq r(t_2) \tag{1.17}$$

che equivale a richiedere che la funzione $r(t)$ sia crescente (debolmente), o meglio non decrescente. Ma è forse più ragionevole che per un individuo razionale $r(t)$ sia strettamente crescente, e una condizione sufficiente affinché ciò avvenga è che sia

$$r'(t) = \frac{d}{dt} r(t) > 0 \tag{1.18}$$

Definizione: *Ogni funzione $r(t)$ che soddisfi le proprietà*

$$\begin{array}{lrcl} 1) & r(0) & = & 1 \\ 2) & r'(t) & \geq & 0 \end{array}$$

può essere assunta come fattore di montante e definisce una "legge di capitalizzazione".

Questo perché una tale funzione $r(t)$ può essere utilizzata da un individuo per rappresentare l'equivalenza finanziaria fra due importi monetari esigibili in tempi diversi.

Definizione: *Si definisce "regime di capitalizzazione" una famiglia di funzioni fattore di montante che dipendono da uno o più parametri.*

Esempio 1. Consideriamo

$$r(t) = 1 + \alpha t^2 \tag{1.19}$$

con un parametro α che assumiamo positivo, $\alpha > 0$. Per ogni valore fissato di α la funzione $r(t)$ è una possibile funzione fattore di montante o fattore di capitalizzazione, in quanto soddisfa:

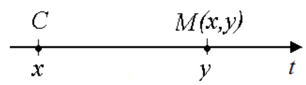
$$\begin{array}{lrcll} 1) & r(0) & = & 1 & \\ 2) & r'(t) & = & 2\alpha t > 0 & \qquad \forall t > 0 \end{array}$$

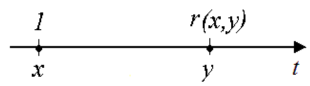
quindi $r(t) = 1 + \alpha t^2$ rappresenta un possibile "*regime finanziario di capitalizzazione*" e

$$r(t) = 1 + 0.01t^2$$

rappresenta una legge di capitalizzazione di tale regime (corrispondente al valore $\alpha = 0.01$ del parametro). Al cambiare del valore del parametro α cambia la legge nell'ambito dello stesso regime finanziario.

Quanto detto sopra, in termini del tempo $t = (y - x)$, può essere riconsiderato mantenendo l'intervallo (x, y), in cui x è pensato come istante iniziale e y istante finale, introducendo funzioni a due tempi:





Il montante lo possiamo pensare dato da una funzione "a due tempi" del tipo:

$$M(x, y) = F(C, x, y) \tag{1.20}$$

(in cui C rappresenta il capitale investito al tempo x, ed F il relativo montante al tempo y), che soddisfi le seguenti proprietà:

1) *omogeneità rispetto a* C:

$$F(C, x, y) = CF(1, x, y)$$

la funzione intensiva $F(1, x, y)$ viene usualmente indicata con $r(x, y)$ (in cui si omette di indicare, come sottintéso, che il capitale a cui si riferisce è il capitale unitario) e si chiama fattore di montante a due tempi,

$$F(1, x, y) = r(x, y) \qquad \forall y \geq x$$

e soddisfa

$$r(x, x) = 1 \tag{1.21}$$

La funzione $r(x, y)$ rappresenta il montante in y considerato equivalente ad un capitale unitario in x, e relativamente al capitale iniziale di importo C il montante è dato da

$$M(x, y) = Cr(x, y) \tag{1.22}$$

2) *monotonia rispetto ad* y:

$$y_1 < y_2 \implies r(x, y_1) \leq r(x, y_2) \qquad \forall x \text{ fissato, } x < y_1$$

ed una condizione sufficiente affinchè si verifichi è che sia

$$\frac{\partial}{\partial y} r(x, y) > 0 \qquad \forall y > x$$

È chiaro che data una legge di capitalizzazione $r(t)$, possiamo sempre scriverla come funzione a due tempi, infatti è sufficiente sostituire $(y - x)$ al posto di t. Per esempio, nel caso di $r(t) = 1 + \alpha t^2$ otteniamo $r(x, y) = 1 + \alpha(y - x)^2$. Ma non è necessariamente vero il viceversa. Per esempio la funzione

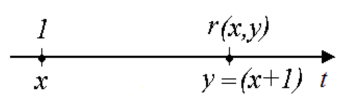
$$r(x, y) = 1 + \alpha(y^2 - x^2) \qquad \alpha > 0 \tag{1.23}$$

soddisfa

$$\begin{aligned} r(x, x) &= 1 \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= 2\alpha y > 0 \qquad \forall y > x > 0 \end{aligned}$$

e quindi rappresenta una legge, anzi un regime finanziario di capitalizzazione a due tempi (con parametro α). Ma non è possibile scriverla solo in funzione di $t = (y - x)$. Si può osservare che con una simile legge l'equivalenza fra due importi finanziari non dipende unicamente dalla durata dell'operazione, ossia dal tempo che intercorre fra i due importi, ma anche dal valore assoluto dei tempi. Per esempio, nel caso in esame, dopo un intervallo di tempo unitario, $y = (x + 1)$, si ha

$$r(x, x + 1) = 1 + \alpha((x + 1)^2 - x^2) = 1 + \alpha(2x + 1)$$

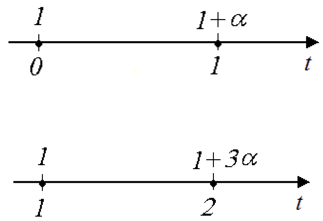


mostrando che $r(x, x+1)$ dipende esplicitamente da x. Abbiamo così:

$$r(0, 1) = 1 + \alpha$$

$$r(1, 2) = 1 + 3\alpha$$

Ossia il montante che si ottiene in un intervallo di tempo unitario è diverso a seconda del tempo x da cui si parte. Ciò non è considerato



molto "razionale". Quindi è ragionevole assumere che nel considerare leggi di capitalizzazione a due tempi si introduca anche un'ulteriore proprietà, detta di *traslabilità*, in base alla quale i montanti risultino dipendenti solo dalla durata dell'operazione finanziaria, e non dal tempo x in cui inizia l'operazione.

Definizione: *Un regime finanziario di capitalizzazione $r(x, y)$ si dice che è traslabile (o uniforme) se la funzione di montante soddisfa*

$$r(x, y) = r(x + \tau, y + \tau) \qquad \forall \tau \tag{1.24}$$

Si ha inoltre che vale il seguente

Teorema 1.1: *Un regime di capitalizzazione $r(x, y)$ è traslabile se e solo se la funzione $r(x, y)$ dipende esplicitamente dalla sola differenza dei tempi, $t = (y - x)$.*

In tal modo, con regimi finanziari traslabili, è sempre possibile passare da una legge fattore di montante a due tempi $r(x, y)$ ad una funzione fattore di montante ad un solo tempo $r(t)$ ponendo $t = (y - x)$.

Nota: qualunque sia l'unità di tempo fissata (per misurare t), se indichiamo con i il tasso effettivo di interesse nell'unità di tempo $t = 1$, si ha:

$$r(1) = 1 + i$$

ossia il montante in $t = 1$ considerato equivalente ad una unità in $t = 0$ è sempre (qualunque sia la funzione fattore di montante) uguale ad 1 più gli interessi maturati nell'unità di tempo. Infatti abbiamo definito il tasso effettivo d'interesse nell'intervallo di tempo $(0, 1)$ il rapporto

$$i = \frac{r(1) - r(0)}{r(0)} = r(1) - 1$$

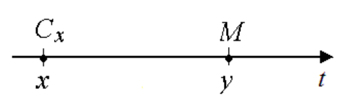
da cui
$$r(1) = 1 + i$$

Esempio 2. Consideriamo la funzione $r(x, y) = 1 + \beta\sqrt{y - x}$. Ci chiediamo se può essere assunta come funzione fattore di montante, ed in tal caso ci interessa capire qual'è il significato del parametro β. Consideriamo le due condizioni, la prima è soddisfatta in quanto risulta $r(x, x) = 1$, la seconda, $\frac{\partial r}{\partial y} = \beta/(2\sqrt{y - x}) > 0$ è soddisfatta per $y > x$ se il parametro β è positivo: $\beta > 0$. In tal caso la funzione definisce un regime finanziario di capitalizzazione, ed è un regime traslabile, in quanto facendo il cambiamento di variabile $t = (y - x)$ si ottiene un regime ad un tempo: $r(t) = 1 + \beta\sqrt{t}$. Inoltre, fissata una unità di tempo, per $t = 1$ si ha $r(1) = 1+\beta$, per cui il significato del parametro β è quello di tasso di interesse per unità di tempo.

Assumendo che l'unità di tempo sia l'anno e che il parametro sia $\beta = 0.04$ (ossia tasso annuo del 4%) quanto sarebbe il montante di un capitale di 1000 € dopo tre anni ? Applicando la legge $r(t) = 1 + 0.04\sqrt{t}$ del regime dato si ha $M = 1000(1 + 0.04\sqrt{3}) = 1069.28$.

1.3. Regimi finanziari di attualizzazione. Possiamo ora ragionare "*specularmente*" e definire **i regimi finanziari di attualizzazione** o **di sconto.**

In questo caso supponiamo fissato un importo M al tempo y e vogliamo determinare una funzione che fornisca l'importo (che indichiamo con C) al tempo x ($x < y$) che riteniamo "*equivalente*" ad M in y, del tipo



$$C_x = G\,(x, y, M) \tag{1.25}$$

ed è ragionevole richiedere che valgano le proprietà di omogeneità e di monotonia:

1) $G(x, y, M)$ sia una funzione omogenea di primo grado rispetto ad M, così che si abbia
$$G(x, y, M) = MG(x, y, 1)$$

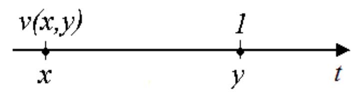
e poniamo

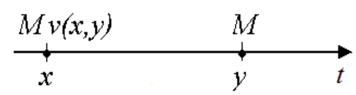
$$v(x,y) = G(x,y,1)$$

così che si possa scrivere

$$C_x = Mv(x,y) \tag{1.26}$$

La funzione $v(x,y)$ è detta funzione fattore di sconto o fattore di attualizzazione a due tempi. Essa rappresenta il valore in x considerato equivalente ad un valore (montante) unitario in y





e soddisfa

$$v(y,y) = 1 \tag{1.27}$$

2) Si richiede inoltre che al diminuire di x il valore $v(x,y)$ diminuisca, o almeno non aumenti, ossia che valga:

$$x_1 < x_2 \implies v(x_1, y) \leq v(x_2, y)$$

ed una condizione sufficiente affinchè ciò avvenga è che sia

$$\frac{\partial v}{\partial x} > 0 \tag{1.28}$$

Si può anche richiedere che all'aumentare di y (ossia all'aumentare della scadenza, e quindi della durata dell'operazione finanziaria) il valore attuale $v(x,y)$ diminuisca, o almeno non aumenti, ossia che valga:

$$y_1 < y_2 \implies v(x, y_1) \geq v(x, y_2)$$

ed una condizione sufficiente affinchè ciò avvenga è che sia

$$\frac{\partial v}{\partial y} < 0 \tag{1.29}$$

Una qualunque funzione $v(x, y)$ che soddisfi le (1.27) e (1.28) (o la (1.29)) può essere assunta come funzione *fattore di attualizzazione* e una famiglia di funzioni $v(x, y)$ dipendenti da uno o più parametri definisce un *regime finanziario di attualizzazione.*

Per esempio, consideriamo il reciproco della funzione data in (1.23), $v(x, y) = 1/r(x, y)$:

$$v(x, y) = \frac{1}{1 + \alpha\,(y^2 - x^2)} \tag{1.30}$$

Come si è fatto nel regime di capitalizzazione per $r(x, y)$, si può facilmente vedere anche ora che la funzione $v(x, y)$ fornisce un regime finanziario di attualizzazione, ma che con tale fattore di attualizzazione si ottengono valori diversi in diversi intervalli di tempo unitari (o di medesima durata finanziaria), e ciò è poco soddisfacente. Si richiede quindi un'ulteriore proprietà.

Definizione: *Si dice che un regime di attualizzazione è traslabile, o uniforme, se la legge di sconto soddisfa*

$$v(x, y) = v(x + \tau, y + \tau) \qquad \forall\tau \tag{1.31}$$

Si ha inoltre che vale il seguente

Teorema 1.2: *Un regime di sconto $v(x, y)$ è traslabile se e solo se la funzione $v(x, y)$ dipende solo dalla differenza $t = (y - x)$.*

Possiamo allora assumere, considerando regimi traslabili, che la funzione di attualizzazione sia rappresentata da una funzione ad un tempo (durata dell'operazione finanziaria) $t = (y - x)$, che indichiamo con $v(t)$, e le condizioni date sopra, le (1.27) e (1.28) (o la (1.29)) si traducono nelle seguenti condizioni che deve soddisfare $v(t)$:

- $v(0) = 1$
- $\frac{d}{dt}v(t) = v'(t) < 0$

Si noti che mentre la funzione di capitalizzazione $r(t)$ è crescente (all'aumentare della durata finanziaria richiediamo che il montante aumenti), la funzione di sconto $v(t)$ è decrescente, ha una derivata negativa rispetto al tempo (o durata finanziaria), in quanto (intuitivamente) all'aumentare della durata richiediamo che il valore attuale diminuisca.

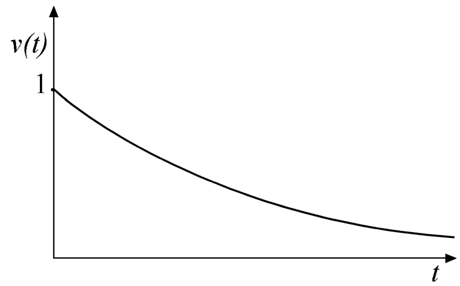
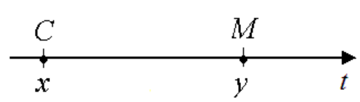


FIGURA 2. *Funzione fattore di sconto* $v(t)$

Osserviamo che si possono definire con funzioni e criteri diversi i regimi di capitalizzazione e di attualizzazione. Tuttavia è ragionevole supporre che se riteniamo equivalenti due importi, C al tempo x ed M al tempo y, dove M è ottenuto capitalizzando C, allora attualizzando M dovremo ottenere C, ossia lo stesso criterio viene utilizzato in operazioni di capitalizzazione e di sconto.
D'altra parte, nella pratica finanziaria, un *contratto* o *accordo* avviene fra due controparti, per esempio A e B, e se per A l'operazione si identifica in un'operazione di attualizzazione allora per B la stessa è un'operazione di capitalizzazione e viceversa.

Ad esempio, il direttore di una banca fa un'operazione di investimento (o capitalizzazione) quando presta ad un impresa l'importo C al tempo x, che sarà restituito con un importo M al tempo y:



Per l'impresa, l'operazione di finanziamento può essere vista come un'-operazione di sconto o di anticipazione, in quanto si impegna a rendere M in y e chiede che tale importo venga "scontato" nella quantità C al tempo x.