

## Premessa

Il testo – rielaborazione del materiale didattico da me preparato in questi anni di insegnamento presso l'Università degli Studi di Cassino e del Lazio Meridionale – presenta alcune peculiarità rispetto ai manuali solitamente utilizzati nei corsi introduttivi di Economia politica.

Innanzitutto, l'essenzialità del testo – solo otto capitoli e un numero complessivo di pagine poco superiore a duecento – capace tuttavia di coprire i fondamentali argomenti della Microeconomia e della Macroeconomia: il modello della domanda e dell'offerta di mercato; il problema del consumatore; il comportamento dell'impresa; l'analisi delle principali forme di mercato (concorrenza perfetta, concorrenza monopolistica, monopolio ed oligopolio); i principali fallimenti del mercato (esternalità e beni pubblici); la frontiera delle possibilità produttive (che rappresenta l'estensione del problema economico alla società nel suo complesso); il modello della domanda e dell'offerta aggregata e i temi del commercio estero e della crescita economica. Nel testo vi è anche una piccola introduzione a quel ramo importante della Microeconomia che va sotto il nome di *Teoria dei giochi*.

Il lavoro, inoltre, dedicando particolare attenzione alla spiegazione dei cicli economici e al tema cruciale della crescita, si occupa anche di politica economica. In verità, il ruolo della politica economica, il processo di accumulazione del capitale (sia fisico che umano) e la crescita economica sono argomenti che difficilmente si trovano nei manuali introduttivi di economia politica.

Infine il testo, pur nella sua sinteticità, non trascura affatto l'aspetto formale della disciplina. Il capitolo 1, infatti, è interamente dedicato agli strumenti matematici maggiormente utilizzati nelle analisi economiche. In particolare, vengono introdotti e spiegati gli strumenti funzionali ed essenziali alla costruzione di un modello economico di tipo matemati-

co<sup>1</sup>. L'analisi grafica dei principali fenomeni economici è sicuramente necessaria (e in alcuni casi sufficiente); ma essa non è che il risultato di relazioni matematiche, e perciò renderla avulsa da esse può rivelarsi alla lunga un grave limite. Il materiale presentato nel capitolo 1 può essere visto come una sorta di piccolo percorso di matematica per l'economia, dal momento che spesso gli studenti del primo anno non hanno le basi matematiche necessarie per affrontare un corso di economia e, al tempo stesso, i corsi di Analisi matematica presentano programmi particolarmente ricchi e in cui non sempre l'aspetto economico degli argomenti trattati viene messo nella giusta evidenza.

Il testo punta a un'ampia diffusione, essendo rivolto in generale a tutti coloro che affrontano per la prima volta un corso di economia politica.

Per gli studenti dei corsi di laurea in Scienze economiche, la conoscenza completa degli strumenti matematici passati in rassegna nel capitolo 1 e degli argomenti più formali (contrassegnati nel testo da un asterisco) risulterà molto utile per continuare ed approfondire lo studio dell'economia politica.

Per gli studenti dei corsi di laurea di natura non economica (giurisprudenza, sociologia, psicologia), invece, un programma più "snello" può essere tarato, dal momento che si tratta (spesso) del loro primo e unico esame di economia politica. Precisamente, il programma ridotto esclude gli argomenti matematicamente più complessi: capitolo 1 (fino al paragrafo 1.2 compreso); capitolo 2; capitolo 3 (escluso il paragrafo 3.4); capitolo 4 (esclusi i paragrafi 4.3, 4.4 e 4.5); capitolo 5 (escluso il paragrafo 5.4); capitolo 6 (esclusi i paragrafi 6.1 e 6.2) e capitolo 7 (escluso il capitolo 8).

Commenti e suggerimenti sono ovviamente graditi, e possono essere inviati all'autore ([gaetano.lisi@unicas.it](mailto:gaetano.lisi@unicas.it)).

---

<sup>1</sup> L'alternativa è ricorrere a modelli economici di tipo non matematico, ma non è un caso se la maggior parte degli economisti trova conveniente formulare modelli economici attraverso metodi e strumenti matematici. Il motivo è semplice: il linguaggio matematico consente di sintetizzare, e al tempo stesso precisare, i ragionamenti teorici utilizzati per spiegare un determinato fenomeno economico, imponendo all'economista di rendere esplicite tutte le ipotesi adottate nell'analisi e che conducono a quel particolare risultato.

## 1. Essenziale di matematica per l'economia

Un modello economico di tipo matematico (d'ora in avanti, semplicemente modello economico) consiste in una serie o in un sistema di equazioni (solitamente, almeno due caratterizzano i modelli più semplici) che “traducono” in termini matematici i ragionamenti e le ipotesi fatte circa il fenomeno economico oggetto di studio. Un'equazione pone in relazione un certo numero di *variabili* con altre. Nei modelli economici, le equazioni principali di solito appaiono sotto forma di *funzioni*. Pertanto, i concetti di equazione, funzione e variabile sono strettamente legati tra loro e rappresentano la struttura portante di un modello economico.

Una *variabile* è una grandezza (come il prezzo, il reddito, il costo, il consumo, gli investimenti, ecc.) che può assumere valori diversi. Proprio perché possono assumere valori diversi, le variabili sono rappresentate da lettere e non da numeri. In un modello economico, l'attenzione si concentra su alcune variabili, ritenute particolarmente interessanti per l'analisi del fenomeno economico oggetto di studio, dette *variabili endogene*, di cui si cerca il valore al fine di dare una soluzione al modello (“risolvere il modello”); mentre, il valore delle altre variabili, dette *variabili esogene*, è considerato conosciuto nel modello. L'importanza attribuita alle variabili è ovviamente relativa e dipende dal tipo di teoria e modello formulato. Variabili endogene in un modello possono essere considerate esogene in un altro e viceversa. La scelta delle variabili, e se esse siano endogene o esogene, è il primo e fondamentale passo da compiere nella costruzione di un modello economico. Accanto alle grandezze variabili, possono esserci anche grandezze che non cambiano, le *costanti* (rappresentate, quindi, da numeri). Una sorta di via di mezzo tra variabili e costanti è rappresentata dai parametri. Il *parametro* è un dato conosciuto del fenomeno da studiare, ma a differenza delle costanti può variare. In tal senso, il para-

metro è assimilabile alla variabile esogena. Infatti, per semplicità, nei modelli economici si parla spesso solo di variabili endogene (grandezze sconosciute) e parametri (grandezze conosciute).

Una volta scelte le variabili, occorre definire la relazione che intercorre tra di esse, cioè occorre introdurre la *funzione*. Partendo dal caso più semplice, date due variabili  $x$  e  $y$ , una funzione è una *relazione* (mentre può non essere vero il contrario) in cui ogni valore di  $x$  determina univocamente un solo valore di  $y$ . Formalmente<sup>1</sup>,

$$y = f(x) \quad (1.1)$$

dove il simbolo funzionale  $f$  è la regola che associa ad ogni valore di  $x$  un solo valore di  $y$ . La (1.1) individua nei modelli economici una *relazione di causa-effetto*: la  $y$  è la *variabile dipendente* o *di risposta*, cioè il risultato, l'effetto prodotto da cambiamenti della  $x$  che è invece la *variabile indipendente* o *esplicativa* (o anche detta *causale*), cioè la causa della variazione della  $y$ .

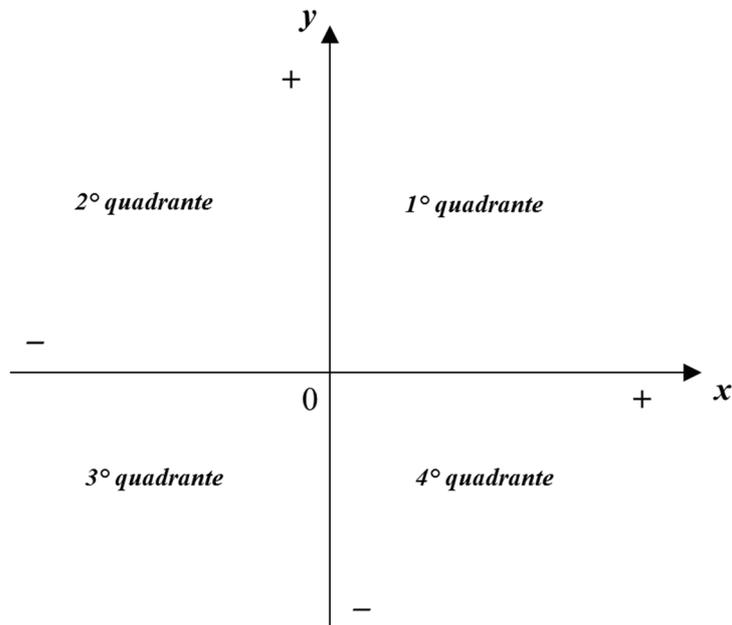
La rappresentazione grafica della relazione che intercorre tra due variabili avviene attraverso gli *assi cartesiani*. Gli assi cartesiani sono due rette orientate e perpendicolari tra loro, una orizzontale e l'altra verticale, il cui punto di intersezione è detto "origine" degli assi (si veda la *Figura 1*), dove entrambe le variabili assumono valore zero.

L'asse orizzontale è detto asse delle *ascisse* (dove viene solitamente rappresentata la variabile indipendente  $x$ ), mentre l'asse verticale è detto asse delle *ordinate* (dove viene solitamente rappresentata la variabile dipendente  $y$ ). Poiché la maggior parte delle variabili economiche assume valori non negativi (cioè positivi o nulli), le rappresentazioni grafiche dei fenomeni economici utilizzano prevalentemente il primo quadrante, dove entrambe le variabili assumono valori positivi. Il "conteggio" dei (quattro) quadranti procede in senso antiorario, da destra verso sinistra (1° quadrante:  $y$  e  $x$  assumono entrambe valori positivi; 2° quadrante:  $x$  assume valori negativi e  $y$  positivi; 3° quadrante:  $x$  e  $y$  assumono entrambi valori negativi; 4° quadrante:  $x$  assume valori positivi e  $y$  negativi).

---

<sup>1</sup> Il "doppio" numero dell'equazione sta ad indicare che si tratta del primo capitolo e della prima equazione.

Figura 1 – Assi Cartesiani



La (1.1), però, esprime una generica relazione tra le variabili, senza esplicitare la natura effettiva della relazione. In altri termini, la (1.1) non ci dice se tra  $y$  e  $x$  esiste una relazione diretta (positiva) oppure inversa (negativa). La relazione è *diretta* (positiva) quando all'aumentare (al ridursi) della  $x$ , la  $y$  aumenta (si riduce), cioè la variazione della  $y$  è dello stesso segno della  $x$ . La relazione è, invece, *inversa* (negativa) quando all'aumentare (al ridursi) della  $x$ , la  $y$  si riduce (aumenta); la variazione della  $y$  è, quindi, di segno opposto a quella della  $x$ . Nella (1.1), nessuna ipotesi sul comportamento delle variabili in esame è stata precisata. Pertanto, nessun significato economico e nessuna rappresentazione grafica possono essere associati alla (1.1) senza prima avergli dato una forma precisa. Di conseguenza, occorre considerare alcuni casi concreti di funzioni. Trattando di variabili economiche, la  $y$  e la  $x$  assumono realisticamente valori non negativi (nulli o positivi).

## 1.1. Funzioni lineari

Partendo dalla forma più semplice di funzione, la *funzione lineare*, la (1.1) può essere specificata nei modi seguenti<sup>2</sup>:

$$y = \alpha + \beta \cdot x \quad (1.1')$$

$$y = 2 + 3 \cdot x \quad (1.1'')$$

dove le lettere greche  $\alpha$  e  $\beta$  (“alfa” e “beta”) rappresentano dei parametri o variabili esogene. La (1.1') e la (1.1'') sono dette *equazioni di comportamento* o *comportamentali* dal momento che indicano come la variabile  $y$  reagisce, si comporta, ai cambiamenti della variabile  $x$ . Quelle di comportamento sono le equazioni più importanti ed utilizzate nei modelli economici e, come detto, appaiono sovente sotto forma di funzioni. In sostanza, la funzione  $f(x) = \alpha + \beta \cdot x$  è equivalente all'equazione  $y = \alpha + \beta \cdot x$  nel caso in cui, come nei modelli economici, si attribuisce un nome all'*output* delle funzioni, appunto indicando  $y = f(x)$ . Precisamente, Chiang (2002) distingue tre tipi di equazioni<sup>3</sup>:

1. le *equazioni di comportamento* o *comportamentali*, che possono riferirsi sia a comportamenti di entità umane (come l'andamento del consumo delle famiglie al variare del loro reddito), che a comportamenti di entità non umane (come l'andamento del costo totale di una impresa al variare della quantità prodotta);
2. le *equazioni di definizione*, caratterizzate dal simbolo di identità  $\equiv$  che indica che una variabile è identica ad un'altra. Queste equazioni sono solitamente introdotte nel modello economico per semplificare la notazione, introducendo una nuova variabile al posto di una operazione tra variabili (solitamente variabili esogene o parametri); ad esempio, definendo  $a \equiv (b - c + d)$ ;
3. le *condizioni di equilibrio*, infine, precisano i requisiti, le condizioni necessarie affinché l'equilibrio venga raggiunto.

Dal punto di vista economico, dovrebbe essere evidente che la cosa

---

<sup>2</sup>In questo caso, il numero delle equazioni sta ad indicare che si tratta di varianti dell'equazione (1.1). Precisamente, la (1.1') è la prima variante della (1.1); mentre, la (1.1'') è la seconda variante della (1.1).

<sup>3</sup>Alpha C. Chiang (2002), *Introduzione all'economia matematica*, Bollati Boringhieri.

più importante da definire in una equazione di comportamento è la relazione tra le variabili (se diretta o inversa). La differenza principale tra le due equazioni di comportamento presentate è che la (1.1') è una *funzione parametrica* (caratterizzata cioè da parametri), mentre la (1.1'') è una *funzione numerica* (caratterizzata da numeri, valori). Precisamente, se i parametri  $\alpha$  e  $\beta$  assumono valori positivi, ciò che distingue la (1.1') dalla (1.1'') è il cosiddetto livello di generalità: la (1.1') ha un livello di generalità molto più alto dal momento che utilizza parametri al posto di valori costanti. Infatti, la (1.1') definisce una famiglia di funzioni comprendenti anche la (1.1'') quando  $\alpha = 2$  e  $\beta = 3$ . Se, invece, il parametro  $\beta$  assume valori negativi, cambia anche la natura della relazione tra  $y$  e  $x$ : la (1.1'') esprime sempre una relazione diretta tra le variabili ma ora la (1.1') esprime una relazione inversa, cioè quando  $x$  aumenta,  $y$  si riduce e viceversa. Infine, se è il parametro  $\alpha$  ad essere negativo, allora è negativa l'intercetta verticale della (1.1'), vale a dire che è negativo il valore (“di partenza”) della variabile  $y$  quando la variabile  $x$  assume valore nullo (zero). Per quanto riguarda l'intercetta, in caso di relazione negativa (inversa) tra le variabili, come ad esempio:

$$y = 10 - 2 \cdot x \quad (1.1''')$$

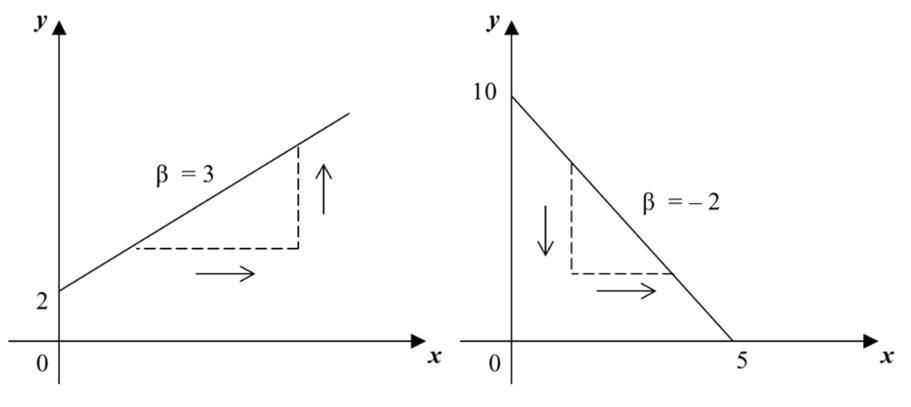
è possibile calcolare sia l'*intercetta verticale* (il valore di  $y$  quando la  $x$  assume valore zero), che l'*intercetta orizzontale* (il valore di  $x$  quando la  $y$  assume valore zero). Dalla (1.1'''), per  $x = 0$ , è immediatamente ottenere  $y = 10$ ; mentre,  $x = \frac{10}{2} = 5$  quando  $y = 0$ <sup>4</sup>.

La rappresentazione grafica di una funzione lineare è una retta ed il parametro  $\beta$  individua *la pendenza della retta*, cioè definisce il suo andamento (crescente o decrescente) nel piano cartesiano. Se  $\beta > 0$ , come ad esempio nella (1.1'') dove  $\beta = 3$ , la relazione tra la  $x$  e  $y$  è diretta e la retta è crescente rispetto all'origine degli assi; viceversa; invece, se  $\beta < 0$ , come ad esempio nella (1.1''') dove  $\beta = -2$ , la relazione tra la  $x$  e  $y$  è inversa e la retta è decrescente rispetto all'origine degli assi. Infine, se  $\beta = 0$  non c'è nessuna relazione tra  $x$  e  $y$ . La rappresentazione grafica delle funzioni (1.1'') e (1.1''') è proposta in *Figura 2*.

---

<sup>4</sup> Si parla di intercetta verticale e orizzontale per il semplice fatto che la variabile  $y$  è rappresentata graficamente sull'asse verticale e la  $x$  su quello orizzontale.

Figura 2 – Funzioni lineari



È immediato osservare che nella (1.1'') quando la  $x$  aumenta (si muove dall'origine degli assi verso destra), la  $y$  aumenta (si muove dall'origine degli assi verso l'alto); mentre, nella (1.1'''), quando la  $x$  aumenta, la  $y$  si riduce (si avvicina all'origine degli assi)<sup>5</sup>. Si noti, inoltre, che solo per la (1.1''') è possibile calcolare anche l'intercetta orizzontale.

In generale, la **pendenza** di una funzione (sia essa lineare o meno) può essere calcolata in un punto attraverso il rapporto tra la variazione di  $y$  e la variazione di  $x$  (definito *rapporto incrementale* di una funzione in un punto):

$$\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

dove la lettera greca  $\Delta$  (“Delta” maiuscola) sta ad indicare appunto una variazione. Nelle funzioni lineari appena analizzate, la pendenza è sempre la stessa in tutti i punti della retta. Ad esempio nella (1.1'') la pendenza è sempre positiva e pari a  $\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$ ; quindi, per ogni variazione unitaria della  $x$  ( $\Delta x = 1$ ), la variazione (dello stesso segno) della  $y$  è pari a 3 ( $\Delta y = 3$ ). Invece, nella (1.1''') la pendenza è sempre negativa e pari a  $\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -2$  e per ogni variazione unitaria della  $x$  ( $\Delta x = 1$ ), la variazione (di segno opposto) della  $y$  è pari a 2 ( $\Delta y = -2$ ).

<sup>5</sup> Si ricordi che le variabili assumono valore zero all'origine degli assi, per cui un allontanamento da tale punto implica un incremento del valore della variabile.

## 1.2. Funzioni non lineari

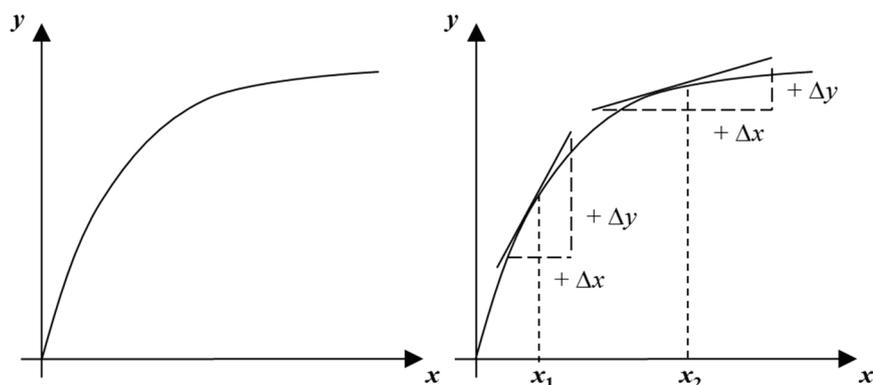
Difficilmente, però, i fenomeni economici possono essere descritti da funzioni lineari. Infatti, la maggior parte delle equazioni comportamentali nei modelli economici (o meglio quelle maggiormente realistiche) non sono rappresentate da funzioni lineari, ma da curve o funzioni non lineari del tipo:

$$y = x^n \quad (1.2)$$

La (1.2) è una *funzione potenza* molto utilizzata in ambito economico, dove  $n$  (diverso da 1 altrimenti si avrebbe  $y = x$ ) è un parametro il cui valore rende la funzione particolarmente flessibile e adattabile alla descrizione di diversi fenomeni economici. Ovviamente, la rappresentazione grafica della (1.2) dipenderà dal valore assunto da  $n$ . In generale, il parametro  $n$  può essere positivo e maggiore di uno ( $n > 1$ ), positivo ma minore di uno ( $0 < n < 1$ ) e negativo ( $n < 0$ ). In tutti e tre i casi, la funzione (1.2) non è lineare. La principale e più importante differenza con le funzioni lineari è che nella (1.2) la pendenza  $\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  non è più costante, ma assume un valore diverso a seconda del valore assunto dalla variabile  $x$ , cioè sarà diversa da punto a punto lungo tutta la curva. Utilizzando il concetto matematico – prima introdotto – di rapporto incrementale di una funzione in un punto, è possibile descrivere l'andamento (la forma) della funzione (1.2) al variare del valore assunto dal parametro  $n$ . Precisamente,

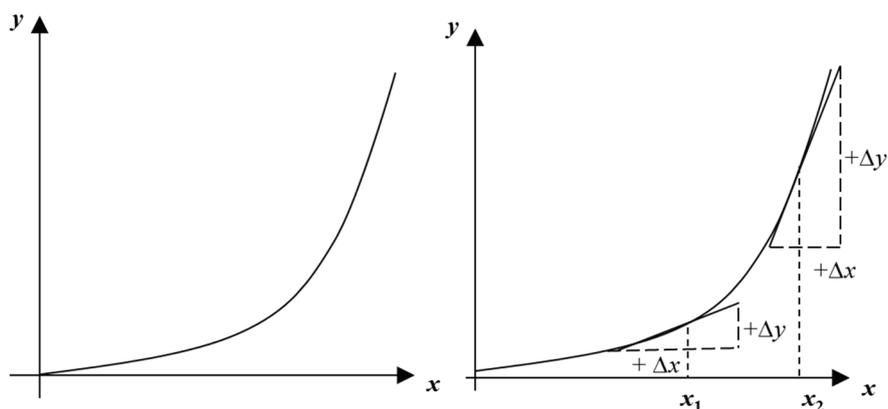
- se  $0 < n < 1$ , quando la  $x$  aumenta, la  $y$  aumenta: la relazione è quindi positiva. Inizialmente, inoltre, la variazione di  $x$  (cioè  $\Delta x$ ) è minore della variazione di  $y$  ( $\Delta y$ ) e la curva è ripida, cioè la pendenza  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  è alta (si veda la *Figura 3*): questo vuol dire che all'aumentare di  $x$ , l'aumento di  $y$  è forte. Successivamente, invece, la variazione di  $x$  diventa maggiore della variazione di  $y$  ( $\Delta x > \Delta y$ ) e la curva diventa piatta, cioè la pendenza  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  si riduce: pertanto, per successivi aumenti di  $x$  (nel grafico  $x_2 > x_1$ ), l'aumento di  $y$  diventa più debole (si veda di nuovo la *Figura 3*);

Figura 3 – Funzione potenza con  $0 < n < 1$



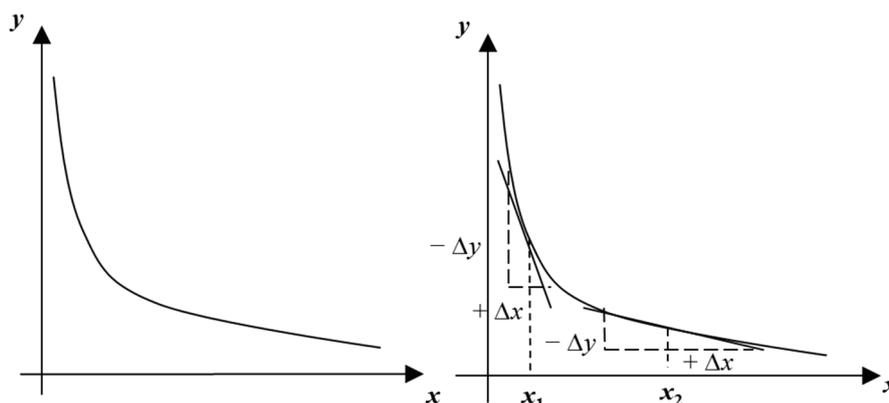
- se  $n > 1$ , quando la  $x$  aumenta, la  $y$  aumenta: la relazione è ancora positiva. Inizialmente, la variazione di  $x$  è maggiore della variazione di  $y$  ( $\Delta x > \Delta y$ ) e la curva è piatta, cioè la pendenza  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  è bassa: all'aumentare di  $x$ , l'aumento di  $y$  è debole. Successivamente, la variazione di  $x$  diventa minore della variazione di  $y$  ( $\Delta x < \Delta y$ ) e la curva diventa ripida, cioè la pendenza  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  aumenta: per successivi aumenti di  $x$ , quindi, l'aumento di  $y$  diventa più forte (si veda la *Figura 4*);

Figura 4 – Funzione potenza con  $n > 1$



- se  $n < 0$ , quando la  $x$  aumenta, la  $y$  si riduce (si avvicina all'origine degli assi): la relazione è in questo caso negativa. Inizialmente, la variazione di  $x$  è minore della variazione (in valore assoluto) di  $y$  e la curva è ripida, cioè la pendenza  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  (in valore assoluto) è alta: questo vuol dire che all'aumentare di  $x$ , la riduzione di  $y$  è forte. Successivamente, la variazione di  $x$  è maggiore della variazione (in valore assoluto) di  $y$  e la curva è piatta, cioè la pendenza  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  (in valore assoluto) si riduce: per successivi incrementi di  $x$ , la riduzione di  $y$  è meno marcata (si veda la *Figura 5*)<sup>6</sup>.

Figura 5 – Funzione potenza con  $n < 0$



Riassumendo, per  $0 < n < 1$  la variazione (dello stesso segno) di  $y$  al variare di  $x$  è prima forte e poi debole (la curva crescente è prima ripida e poi piatta); invece, per  $n > 1$  la variazione (dello stesso segno) di  $y$  al variare di  $x$  è prima debole e poi forte (la curva crescente è prima piatta e poi ripida); infine, per  $n < 0$  la variazione (di segno inverso) di  $y$  al variare di  $x$  è prima forte e poi debole (la curva decre-

<sup>6</sup> Utilizzando il concetto di *valore assoluto*, si considera solo il valore e non anche il segno della variazione (in sostanza, non si considera il segno negativo di  $\Delta y$ ); in tal modo, è possibile concentrare l'attenzione sull'intensità, sulla forza delle variazioni (visto e considerato che si conosce già il segno della relazione tra  $y$  e  $x$ ).

scente è prima ripida e poi piatta). Inoltre, per  $n > 1$  e per  $0 < n < 1$ ,  $y = 0$  quando  $x = 0$ . Invece, per  $n < 0$ , poiché  $y$  decresce al crescere di  $x$ , la funzione (1.2) assumerà il suo valore massimo quando  $x = 0$  (nella *Figura 5*, infatti, quando  $x$  si avvicina all'origine degli assi, cioè si avvicina al valore zero, la  $y$  tende a raggiungere valori molto alti)<sup>7</sup>.

L'esponente della funzione potenza assume un ruolo cruciale in economia essendo associato all'importantissimo ed utilissimo concetto di **elasticità**. L'elasticità esprime la variazione percentuale della variabile dipendente in seguito ad una variazione dell'1% nella variabile indipendente. Ad esempio, se  $y = x^{0,6}$ , allora un incremento di  $x$  dell'1% determina un aumento di  $y$  dello 0,6%. Invece, se  $y = x^{-0,6}$ , allora un incremento di  $x$  dell'1% determina una riduzione di  $y$  dello 0,6%. L'esponente della funzione potenza (l'elasticità) non solo offre indicazioni sul segno e l'intensità della relazione tra le due variabili, ma “depurando” la relazione dall'effetto unità di misura ( $y$  e  $x$  possono, infatti, essere misurate in unità di misura differenti) esprime la variazione di  $y$  al variare di  $x$  in termini percentuali.

### 1.3. Derivata di una funzione e (alcune) importanti regole di derivazione

Il concetto di *derivata di una funzione* è strettamente legato a quello di variazione visto in precedenza e rappresentato dalla lettera greca  $\Delta$ . Infatti, la derivata di una funzione  $y = f(x)$ , indicata comunemente con uno dei seguenti simboli  $\frac{dy}{dx}$  oppure  $\frac{df(x)}{dx}$  o anche  $f'(x)$ , non è altro che il limite del rapporto incrementale quando la variazione di  $x$  tende a zero:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

In pratica, il concetto di *derivata di una funzione* permette di generalizzare il procedimento basato sul rapporto incrementale che – come

---

<sup>7</sup>I tre grafici di *Figura 3*, *Figura 4* e *Figura 5* possono essere ottenuti, ad esempio, utilizzando un foglio Excel e attribuendo al parametro  $n$  i seguenti valori:  $n = 0,5$ ;  $n = 2$  e  $n = -0,5$ . Si avranno, pertanto, le funzioni  $y = x^{0,5}$ ;  $y = x^2$  e  $y = x^{-0,5}$ , rappresentate graficamente per un dato intervallo di valori della  $x$  (ad esempio, da  $x = 1$  a  $x = 20$ ).

visto nel paragrafo precedente – andrebbe effettuato per ogni punto lungo la curva. La derivata assume un preciso significato economico: calcolando la derivata è possibile conoscere, per una qualsiasi funzione, la relazione esistente tra le variabili di interesse. Inoltre, in caso di funzioni non lineari dove la pendenza non è costante, è possibile sapere come la relazione varia al variare della variabile indipendente  $x$ . È utile, pertanto, conoscere le regole di derivazione delle più importanti ed utilizzate funzioni (per semplicità, si considera il caso in cui la  $x$  assume solo valori positivi non nulli, cioè  $x > 0$ ).

*Funzione costante:*  $y = \alpha$       *derivata:*  $\frac{dy}{dx} = 0$

*Funzione lineare:*  $y = \alpha + \beta \cdot x$       *derivata:*  $\frac{dy}{dx} = \beta$

$y = x$       *derivata:*  $\frac{dy}{dx} = 1$

*Funzione potenza:*  $y = x^n$       *derivata:*  $\frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$

$y = x^{-1}$       *derivata:*  $\frac{dy}{dx} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$y = x^2$       *derivata:*  $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot x$

$y = \alpha + x^n$       *derivata:*  $\frac{dy}{dx} = 0 + n \cdot x^{n-1}$

$y = \alpha \cdot x^n$       *derivata:*  $\frac{dy}{dx} = \alpha \cdot n \cdot x^{n-1}$

$y = \sqrt{x} = x^{0,5}$       *derivata:*  $\frac{dy}{dx} = 0,5 \cdot x^{-0,5} = 0,5 \cdot \frac{1}{x^{0,5}}$

*Funzione logaritmica:*  $y = \ln(x)$       *derivata:*  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

*Funzione esponenziale:*  $y = e^x$       *derivata:*  $\frac{dy}{dx} = e^x$

Come detto, il calcolo della derivata di una funzione consente di definire il segno e l'intensità della relazione esistente tra le variabili di interesse. Si consideri la funzione potenza,

$$y = f(x) = x^2$$

Utilizzando la regola di derivazione di una funzione potenza si ottiene:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot x > 0$$

La relazione tra  $y$  e  $x$  è quindi positiva. Al crescere di  $x$  cresce anche  $y$  e viceversa. Per conoscere la “forma” della funzione, vale a dire come la relazione (la pendenza dal punto di vista grafico) varia al variare di  $x$ , è sufficiente calcolare “la derivata della derivata”, cioè la *derivata seconda*, indicata comunemente con uno dei seguenti simboli  $\frac{d^2y}{dx^2}$  o  $f''(x)$ . In pratica, essendo  $2 \cdot x$  una funzione, è possibile calcolare una “ulteriore” derivata. Utilizzando la regola di derivazione di una funzione lineare si ricava:

$$\frac{d(2 \cdot x)}{dx} = 2 > 0$$

Il segno (positivo) della derivata seconda stabilisce che la relazione positiva tra  $y$  e  $x$  cresce a tassi crescenti, cioè all’aumentare di  $x$  la variazione positiva di  $y$  diventa sempre “più forte”. Se, invece, si considera una funzione logaritmica del tipo:

$$y = f(x) = \ln x$$

Utilizzando la regola di derivazione di una funzione logaritmica si ricava:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} > 0$$

La relazione tra  $y$  e  $x$  è ancora positiva. Calcolando la derivata seconda si ricava (poiché  $\frac{1}{x} \equiv x^{-1}$ ):

$$\frac{d(x^{-1})}{dx} = (-1) \cdot x^{-2} < 0$$

Il segno (negativo) della derivata seconda stabilisce che la relazione positiva tra  $y$  e  $x$  cresce a tassi decrescenti, cioè all’aumentare di  $x$  la variazione positiva di  $y$  diventa sempre “più debole”.

Per riassumere, data una generica funzione:

$$y = f(x)$$

la relazione tra  $y$  e  $x$  è positiva se la derivata prima è maggiore di zero,  $\frac{dy}{dx} > 0$ , mentre è negativa se  $\frac{dy}{dx} < 0$ <sup>8</sup>. Se la derivata seconda è nul-

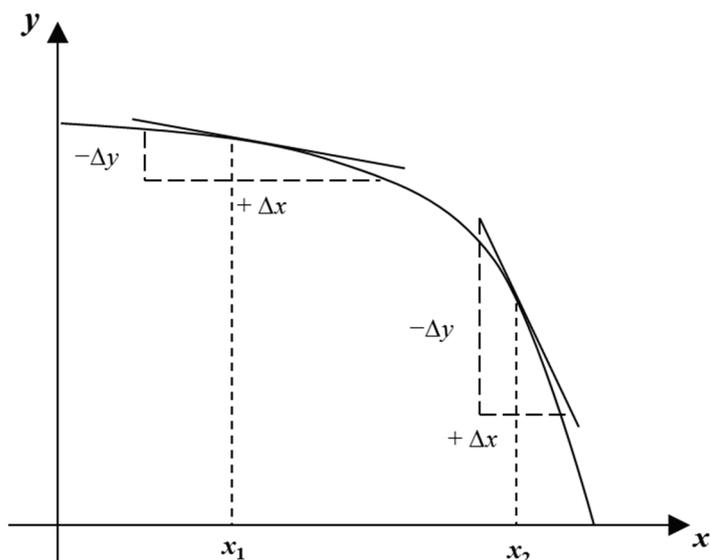
---

<sup>8</sup> Ovviamente, non vi è alcuna relazione tra le variabili se la derivata prima è pari a zero.

la, indicata con  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ , la funzione è lineare, cioè è una retta con pendenza costante pari alla derivata prima. Infine,

- se  $\frac{dy}{dx} > 0$  e  $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ , la relazione è crescente a tassi crescenti. La rappresentazione grafica è simile al caso generale già visto per le funzioni potenza con  $n > 1$  (la curva è prima “piatta” e poi “ripida”);
- se  $\frac{dy}{dx} > 0$  e  $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ , la relazione è crescente a tassi decrescenti. La rappresentazione grafica è simile al caso generale già visto per le funzioni potenza con  $0 < n < 1$  (la curva è prima “ripida” e poi “piatta”);
- se  $\frac{dy}{dx} < 0$  e  $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ , la relazione è decrescente a tassi decrescenti. La rappresentazione grafica è simile al caso generale già visto per le funzioni potenza con  $n < 0$  (la curva è prima “ripida” e poi “piatta”);
- se  $\frac{dy}{dx} < 0$  e  $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ , la relazione è decrescente a tassi crescenti. A differenza degli altri casi, una funzione non lineare (una curva) caratterizzata da derivata prima e derivata seconda minori di zero non può essere rappresentata da una funzione potenza, ma richiede una più complessa funzione matematica (di cui si parlerà più avanti). Infatti, per qualsiasi valore di  $n < 0$ , la forma della funzione  $y = x^n$  sarà sempre decrescente a tassi decrescenti, cioè all’aumentare di  $x$ , la  $y$  prima si riduce molto e poi via via sempre meno. Quando, invece,  $\frac{dy}{dx} < 0$  e  $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ , la riduzione di  $y$  all’aumentare di  $x$  è prima debole e poi via via sempre più forte, vale a dire che la curva decrescente è prima “piatta” (pendenza più bassa in valore assoluto) e poi “ripida” (pendenza più alta in valore assoluto). Tale particolare andamento è proposto nella *Figura 6*.

Figura 6 – Curva decrescente a tassi crescenti



Infine, il fondamentale concetto economico di elasticità prima introdotto è strettamente legato al concetto matematico di derivata. Infatti, l'elasticità di  $y$  rispetto a  $x$ , che indichiamo con la lettera greca  $\varepsilon$  ("epsilon" minuscola), è pari alla derivata di  $y$  rispetto ad  $x$  moltiplicato per il rapporto tra  $x$  e  $y$ :

$$\varepsilon = \frac{dy}{dx} \cdot \left(\frac{x}{y}\right) \quad (1.3)$$

Infatti, l'elasticità della funzione  $y = x^n$  è data da:<sup>9</sup>

$$\varepsilon = n \cdot x^{n-1} \cdot \left(\frac{x}{x^n}\right) = n \cdot x^{n-1+(1-n)} = n \cdot x^0 = n \quad (1.3')$$

ottenendo quindi che per la funzione potenza l'elasticità è esattamente

<sup>9</sup>Utilizzando le operazioni tra potenze aventi la stessa base. Precisamente, il quoziente di due potenze aventi la stessa base è una potenza avente come base la stessa base e come esponente la differenza degli esponenti; mentre, il prodotto di due potenze aventi la stessa base, è una potenza avente come base la stessa base e come esponente la somma degli esponenti. Infine, la potenza di una potenza è una potenza avente come base la stessa base e come esponente il prodotto degli esponenti.

pari all'esponente della funzione. Per l'equazione della retta in precedenza vista,  $y = \alpha + \beta \cdot x$ , invece, l'elasticità è pari a:

$$\varepsilon = \beta \cdot \frac{x}{\alpha + \beta \cdot x} \quad (1.3'')$$

sebbene non più rappresentata da un semplice parametro, anche nella (1.3'') l'elasticità  $\varepsilon$  offre la stessa utilissima informazione, esprimendo la variazione percentuale della  $y$  associata ad una variazione dell'1% nella  $x$ .

#### 1.4. Funzione inversa

In economia il concetto di *funzione inversa* è molto utilizzato, dal momento che le variabili possono essere dipendenti o indipendenti a seconda del tipo di analisi effettuata. Per *funzione inversa* intendiamo una funzione in cui la variabile che prima era dipendente diventa la variabile indipendente e la variabile che prima era indipendente diventa la variabile di risposta (dipendente). La funzione inversa della generica funzione  $y = f(x)$  è espressa nel modo seguente:

$$x = f^{-1}(y) \quad (1.4)$$

in cui appunto la  $x$  diventa la variabile dipendente e la  $y$  quella indipendente<sup>10</sup>.

L'uso della forma inversa della funzione iniziale non muta il tipo di relazione esistente tra le variabili, nel senso che se tra  $y$  e  $x$  c'è una relazione positiva (o negativa), tale relazione resta immutata nella funzione inversa. Ciò che cambia è il valore e il segno dell'intercetta e il solo valore della pendenza in caso di funzioni lineari, mentre cambia la forma della funzione in caso di funzioni non lineari. Ad esempio, in caso di funzione lineare  $y = a + b \cdot x$ , dove  $a$  e  $b$  sono entrambi pa-

---

<sup>10</sup>Una funzione  $y = f(x)$  è invertibile, e quindi è possibile calcolare la sua funzione inversa, se e solo se la funzione è *biunivoca*. Una funzione  $y = f(x)$  definita in un particolare dominio è biunivoca se per ogni  $x$  del dominio corrisponde una e una sola  $y$  e viceversa. Il dominio di una funzione, detto anche campo di esistenza o insieme di definizione, è il sottoinsieme dei numeri reali (al più, tutto l'insieme) in cui ha senso valutare la funzione. Ad esempio, il dominio di una funzione logaritmica è l'insieme dei numeri reali positivi.

rametri positivi ( $a, b > 0$ ), la relativa funzione inversa è la seguente:

$$x = f^{-1}(y) = \frac{1}{b} \cdot y - \frac{a}{b} \quad (1.4')$$

Nella funzione di “partenza”  $y = a + b \cdot x$ , l’intercetta verticale è  $a > 0$  e la relazione tra  $y$  e  $x$  è positiva (la pendenza della retta è pari a  $b > 0$ ). Nella (1.4’), la relazione tra  $y$  e  $x$  è sempre diretta (positiva),  $\frac{1}{b} > 0$  essendo  $b > 0$ , e quindi all’aumentare dell’una aumenta anche l’altra; tuttavia, la pendenza della (1.4’),  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{b}$ , sarà più alta (la retta più ripida) se  $b < 1$  poiché  $\frac{1}{b} > 1$ ; viceversa, la pendenza della (1.4’) sarà più bassa (la retta più piatta) se  $b > 1$  dal momento che  $\frac{1}{b} < 1$ . Inoltre, l’intercetta verticale è negativa e pari a  $-\frac{a}{b}$  (in caso di funzione inversa, infatti, è la variabile  $x$  ad essere rappresentata sull’asse verticale).

In caso di funzione non lineare del tipo  $y = x^{0,5}$ , la funzione inversa è ottenuta elevando entrambe le variabili al reciproco dell’esponente (considerando anche il segno) o parimenti elevando al quadrato, dal momento che  $\frac{1}{0,5} = 2$ <sup>11</sup>:

$$x = f^{-1}(y) = y^2 \quad (1.4'')$$

La funzione di “partenza”  $y = x^{0,5}$  esprime una relazione positiva tra le variabili; precisamente è una funzione crescente a tassi decrescenti (una curva prima ripida e poi piatta). Nella (1.4’), invece, la relazione tra  $y$  e  $x$  resta positiva, ma la funzione inversa definisce una relazione crescente a tassi crescenti (una curva prima piatta e poi ripida). Un ragionamento analogo ma esattamente opposto poteva essere fatto in caso di funzione di “partenza”  $y = x^2$ .

---

<sup>11</sup> In caso di funzione  $y = x^{-0,5}$ , quindi, la funzione inversa è ottenuta elevando entrambe le variabili a  $\frac{1}{-0,5} = -2$ .

## 1.5. Funzioni di due o più variabili e concetto di derivata parziale

Le funzioni di una sola variabile, così come le funzioni lineari, sono semplificazioni della realtà spesso troppo forti per poter analizzare correttamente i fenomeni economici. Realisticamente, infatti, le variabili economiche sono influenzate da due o più variabili e non da una soltanto. Tuttavia, quanto è stato detto per le funzioni di una sola variabile può essere facilmente esteso anche a funzioni di due variabili del tipo:

$$y = f(x, z) \quad (1.5)$$

dove la variabile  $y$  non dipende più solo dalla variabile  $x$  ma anche dalla variabile  $z$ . Se si vuol sapere come varia  $y$  al variare di  $x$  si deve sempre far ricorso al concetto di derivata, prendendo però in considerazione che ora  $y$  dipende anche da  $z$ . Precisamente, occorre calcolare la *derivata parziale* (espressa con il simbolo matematico  $\partial$ ) che non è altro che una derivata calcolata sotto l'ipotesi di *ceteris paribus*, cioè considerando fissa l'altra variabile indipendente. Formalmente,  $\frac{\partial y}{\partial x}$  è la derivata parziale di  $y$  rispetto a  $x$ , dove il simbolo “ $\partial$ ” al posto di “ $d$ ” ci ricorda che  $y$  è una funzione di due o più variabili. Allo stesso modo,  $\frac{\partial y}{\partial z}$  è la derivata parziale di  $y$  rispetto a  $z$ . Nel calcolo delle derivate parziali si fa sempre riferimento alle regole di derivazione in precedenza introdotte, avendo però cura di utilizzare la condizione di *ceteris paribus*, vale a dire considerando una costante moltiplicativa l'altra variabile.

Una forma funzionale particolarmente utilizzata in economia per rappresentare funzioni di due variabili è la cosiddetta funzione di tipo *Cobb-Douglas*. La funzione *Cobb-Douglas* può essere vista come una “doppia” funzione potenza:

$$y = f(x, z) = x^n \cdot z^m \quad (1.5')$$

dove  $n$  e  $m$  sono i parametri che definiscono l'elasticità di  $y$  rispetto a  $x$  e  $z$ , rispettivamente. La derivata parziale di  $y$  rispetto a  $x$  è la seguente:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = n \cdot x^{n-1} \cdot (z^m)$$

in sostanza, si utilizza la regola di derivazione di una funzione potenza rispetto alla variabile  $x$ , mentre il termine  $z^m$  viene considerato, sotto l'ipotesi di *ceteris paribus*, una costante moltiplicativa. La forma della relazione tra  $y$  e  $x$  dipenderà, come al solito, dal valore del parametro  $n$ . Allo stesso modo, la derivata parziale di  $y$  rispetto a  $z$  è:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = (x^n) \cdot m \cdot z^{m-1}$$

dove ora la costante moltiplicativa è  $x^n$ . Si noti come entrambe le derivate dipendono dal valore assunto dall'altra variabile. Al limite, quando entrambi gli esponenti sono uguali ad 1, vale a dire quando la funzione diventa:

$$y = f(x, z) = x \cdot z \quad (1.5'')$$

la variazione della variabile dipendente al variare di una delle due variabili esplicative dipende unicamente dal valore assunto dall'altra variabile esplicativa:  $\frac{\partial y}{\partial x} = z$  e  $\frac{\partial y}{\partial z} = x$ .

Per funzioni lineari del tipo:

$$y = \alpha + \beta \cdot x + \gamma \cdot z \quad (1.5''')$$

che rappresentano estensioni della (1.1') e dove la lettera greca  $\gamma$  ("gamma") è un parametro come  $\beta$ , il calcolo delle derivate parziali è ancora più semplice, dal momento che la derivata parziale di  $y$  rispetto a  $x$  è esattamente uguale alla derivata di  $y$  rispetto a  $x$  nella funzione  $y = \alpha + \beta \cdot x$ , cioè

$$\frac{\partial(\alpha + \beta \cdot x + \gamma \cdot z)}{\partial x} = \frac{d(\alpha + \beta \cdot x)}{dx} = \beta$$

nelle funzioni lineari, infatti, a prescindere dal numero di variabili, la variazione di  $y$  al variare di una qualsiasi delle variabili esplicative è costante e, quindi, è indipendente dal valore assunto dalle variabili esplicative.

L'intero discorso fatto può essere esteso al caso generale in cui  $y$  è una funzione (lineare o non lineare) di tre o più variabili esplicative.

## 1.6. Le curve di livello

Come detto in precedenza, le funzioni di una sola variabile difficilmente sono in grado di analizzare correttamente i fenomeni economici. Questo solleva un problema nell'analisi grafica delle principali relazioni economiche, dal momento che non è possibile rappresentare in un grafico bidimensionale funzioni di due o più variabili. In tal senso, le funzioni di due variabili possono essere considerate un utile compromesso. Precisamente, la rappresentazione in un grafico bidimensionale di una funzione di due variabili è possibile grazie alle cosiddette *curve di livello*. Nella (1.5), le curve di livello individuano combinazioni di valori diversi di  $x$  e  $z$  che determinano uno stesso valore di  $y$ . La rappresentazione grafica è relativamente semplice e consiste nell'assegnare alla variabile dipendente  $y$  un dato valore, ad esempio  $y = y_0$ , per poi rappresentare le diverse combinazioni delle variabili indipendenti  $x$  e  $z$  che hanno permesso di ottenere quel determinato valore. Pertanto, la relazione tra le variabili  $x$  e  $z$  è implicitamente definita dalla funzione  $y = f(x, z)$ <sup>12</sup>.

Formalmente, le curve di livello possono essere ottenute risolvendo (esplicitando) la funzione di riferimento per una delle due variabili che appaiono come indipendenti. Ad esempio, si consideri la seguente versione della funzione *Cobb-Douglas* prima introdotta:

$$y = f(x, z) = x^{0,5} \cdot z^{0,5}$$

si tratta, infatti, della (1.5') dove  $n = m = 0,5$ . Elevando al quadrato tutti i membri e risolvendo per  $x$ , si ottiene una funzione esplicita rispetto a  $x$  (ovviamente, si poteva anche esplicitarla per  $z$ , il risultato economico non sarebbe cambiato)<sup>13</sup>:

---

<sup>12</sup> Finora sono state prese in considerazione solo *funzioni esplicite*, funzioni cioè in cui la relazione di interesse è chiaramente evidenziata. Le funzioni  $y = f(x) = \alpha + \beta \cdot x$  e  $y = f(x) = x^n$  sono funzioni esplicite rispetto a  $y$ , infatti, la  $y$  è chiaramente espressa come funzione di  $x$ . Per *funzione implicita*, invece, s'intende una funzione in cui la relazione di interesse non è espressa chiaramente, sebbene in alcuni casi possa essere facilmente dedotta.

<sup>13</sup> Un procedimento analogo a quello visto in precedenza per ottenere la funzione inversa. Infatti, ricavare la curva di livello, vale a dire la relazione tra  $x$  e  $z$  implicitamente definita dalla funzione  $y = f(x, z)$ , equivale a ricavare la funzione inversa della  $y = f(x, z)$  esplicitata rispetto ad una delle due variabili indipendenti.

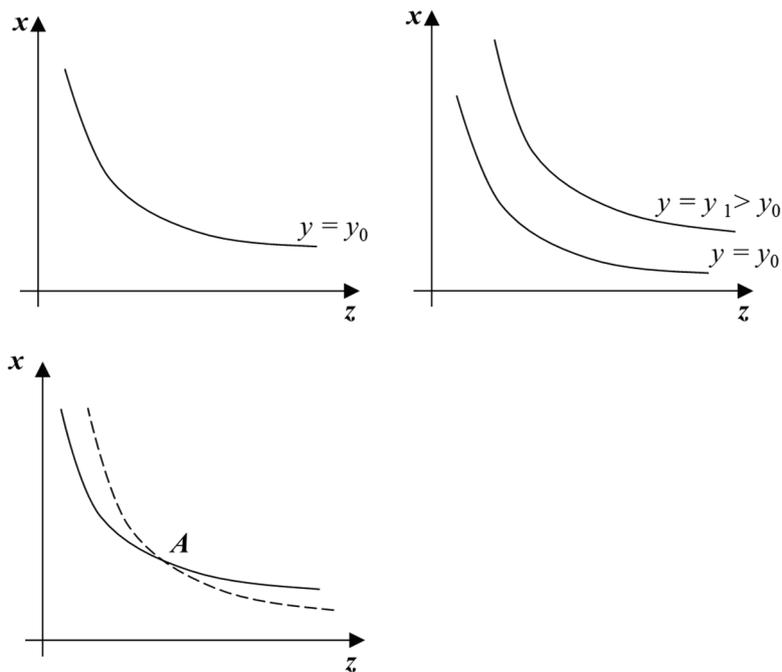
$$x = y^2 \cdot z^{-1} \quad (1.6)$$

per ogni dato valore attribuito alla  $y$ , la (1.6) individua una *curva di livello*. Derivando la precedente espressione rispetto a  $z$ , si ricava la pendenza della curva di livello ( $y$  è nello specifico una variabile esogena, una grandezza conosciuta, quindi, non varia):

$$\frac{dx}{dz} = (-1) \cdot y^2 \cdot z^{-2} = -\frac{(x^{0,5} \cdot z^{0,5})^2}{z^2} = -\frac{x}{z}$$

essendo  $y = x^{0,5} \cdot z^{0,5}$ . Pertanto, le curve di livello assumono una particolare forma che riassume quattro importanti proprietà (si veda anche la *Figura 7*)<sup>14</sup>:

Figura 7 – Curve di livello



<sup>14</sup> Coerentemente con l'equazione matematica (1.6), la variabile  $x$  è rappresentata sull'asse verticale e la variabile  $z$  su quello orizzontale.

1. La pendenza della curva di livello è negativa. A parità di  $y$ , cioè  $y = y_0$ , se aumento  $x$  devo ridurre  $z$  e viceversa.
2. La forma della curva di livello è decrescente a tassi decrescenti. Quando  $x$  assume un valore alto e  $z$  un valore basso, la pendenza  $\frac{dx}{dz} = \left(-\frac{x}{z}\right)$  è elevata (la curva è ripida); viceversa, quando  $x$  assume un valore basso e  $z$  un valore alto, la pendenza  $\frac{dx}{dz} = \left(-\frac{x}{z}\right)$  è bassa (la curva è piatta).
3. Curve di livello traslate in alto a destra implicano un valore maggiore di  $y$  ( $y_1 > y_0$ ), poiché significa che a parità di  $x$  ho più  $z$  e viceversa.
4. Le curve di livello così definite non possono mai intersecarsi tra loro. Una loro intersezione, infatti, come ad esempio nel punto  $A$  del grafico di *Figura 7*, implicherebbe due diversi valori di  $y$  per una stessa combinazione di  $x$  e  $z$ .

### 1.7. Ottimizzazione: massimizzazione e minimizzazione di una funzione

La conoscenza del concetto di derivata (e del relativo calcolo) è cruciale anche per la soluzione dei problemi di ottimizzazione. L'ottimizzazione definisce una situazione ottima (la migliore possibile date le condizioni e i vincoli esistenti) che un dato agente economico (consumatore o impresa) cerca volontariamente di raggiungere. Si cerca di arrivare volontariamente a quella situazione proprio perché è la migliore possibile. L'ottimizzazione si traduce, dal punto di vista matematico, in un problema di massimizzazione o minimizzazione (a seconda dei casi) di una funzione. In pratica, data la funzione da massimizzare o minimizzare (definita "funzione obiettivo"), occorre trovare il valore della variabile indipendente (definita "variabile di scelta"), a cui è associato il valore "massimo" o "minimo" della funzione obiettivo<sup>15</sup>. Matematicamente, condizione necessaria (sebbene non sufficiente) sia per la massimizzazione che per la minimizzazione è derivare la funzione obiettivo rispetto alla variabile di scelta e porre il risultato pari a zero.

---

<sup>15</sup> Ovviamente, in caso di funzioni di due o più variabili, le variabili di scelta possono essere anche più di una.

Si supponga di essere interessati alla massimizzazione della seguente funzione:

$$y = f(x) = a \cdot x - x^2 \quad (1.7)$$

la (1.7) è composta da una funzione lineare ( $a \cdot x$ , con  $a > 0$ ) e da una funzione potenza  $x^n$ , dove  $n = 2$ , preceduta dal segno meno. L'obiettivo è quello di trovare il valore di  $x$  (indicato con  $x^*$ ) a cui è associato il valore massimo della funzione obiettivo. Applicando alla (1.7) la condizione necessaria per la massimizzazione di una funzione si ottiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(a \cdot x - x^2)}{dx} = 0$$

essendo la funzione obiettivo una *funzione composta*, nel calcolo della derivata occorre utilizzare due regole di derivazione (una per la funzione lineare e una per la funzione potenza):

$$a - 2 \cdot x = 0$$

portando  $-2 \cdot x$  (cambiato di segno) da sinistra a destra del segno di uguaglianza, si ricava il valore di  $x$  tale per cui  $y$  assume il suo massimo valore ( $y = y_{max}$ ):

$$x = x^* = \frac{a}{2}$$

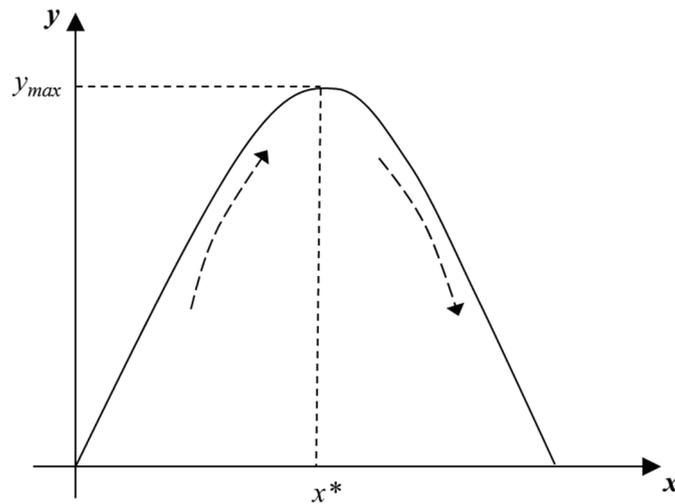
$$y_{max} = a \cdot \left(\frac{a}{2}\right) - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

La rappresentazione grafica della (1.7) è una curva (una parabola, per l'esattezza) la cui pendenza  $\frac{dy}{dx}$  è prima positiva e poi negativa; infatti, la relazione tra  $y$  e  $x$  è fino ad un certo punto positiva, cioè  $\frac{dy}{dx} > 0$ , e poi diventa negativa,  $\frac{dy}{dx} < 0$ . Precisamente, per valori iniziali di  $x$  prevale l'effetto positivo associato alla funzione lineare, successivamente, per valori più alti di  $x$ , a prevalere è l'effetto negativo associato alla funzione potenza, che nella (1.7) è infatti preceduta dal segno meno (si veda la *Figura 8*)<sup>16</sup>.

---

<sup>16</sup>È possibile ricavare il grafico della funzione (1.7), rappresentato in *Figura 8*, utilizzando un foglio Excel ed assegnando alla  $x$  i valori da 0 a 10, con  $a = 10$ .

Figura 8 – Massimizzazione di una funzione



Il punto di massimo ipotizzato è quello in cui la derivata è pari a zero,  $\frac{dy}{dx} = 0$ . Lungo tutta la curva, l'unico punto in cui la pendenza assume valore zero è quello in cui la funzione ha smesso di crescere e non ha ancora iniziato a decrescere (si veda di nuovo la *Figura 8*). A sinistra di tale punto, infatti, la curva cresce ed ha pendenza positiva, cioè la derivata è maggiore di zero; a destra, invece, la curva decresce ed ha pendenza negativa, cioè la derivata è minore di zero. Ne consegue che il punto in cui la funzione obiettivo (1.7) assume il valore massimo è proprio quello in cui la derivata è pari a zero.

In caso di *minimizzazione di una funzione* la procedura non cambia: la scelta ottima si ottiene ugualmente nel punto in cui la derivata della funzione obiettivo rispetto alla variabile di scelta è pari a zero. Si consideri la seguente funzione obiettivo da minimizzare attraverso la scelta ottima di  $x$ :

$$y = f(x) = \frac{a}{x} + x = a \cdot x^{-1} + x \quad (1.7')$$

poiché  $\frac{1}{x} \equiv x^{-1}$ . Anche la (1.7') è una funzione composta ed utilizzando la condizione di ottimo  $\frac{dy}{dx} = 0$ , si ricava:

$$-x^{-2} \cdot a + 1 = 0$$

a questo punto occorre risolvere la precedente espressione per il valore ottimo della variabile  $x$  (sempre indicato con  $x^*$ ), che conduce alla minimizzazione della funzione obiettivo. Portando  $-x^{-2} \cdot a$  da sinistra a destra del segno di uguaglianza si ottiene:

$$1 = \frac{a}{x^2}$$

poiché  $x^{-2} \equiv \frac{1}{x^2}$ , infine, moltiplicando tutti i membri per  $x^2$  e poi elevandoli a  $\frac{1}{2}$  si ricava (al fine di “isolare” la variabile di scelta):

$$x = x^* = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$y_{min} = \frac{a}{a^{\frac{1}{2}}} + a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}$$

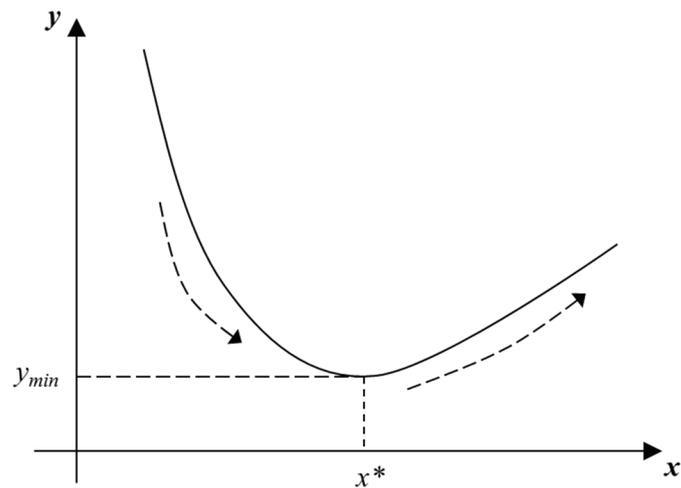
Nella (1.7'), inoltre, quando  $a > 0$  ma  $x = 0$ , la funzione “tende” ad “infinito”, cioè tende ad un valore molto grande, rappresentato dal simbolo matematico  $\infty$ <sup>17</sup>. Questo perché il rapporto tra un numero non nullo e lo zero (nello specifico  $\frac{a}{x}$  quando  $x = 0$ ), è una operazione matematica che dà come risultato un valore molto grande (infinito)<sup>18</sup>. La rappresentazione grafica della (1.7') è una parabola a forma di “U” (si veda la *Figura 9*).

---

<sup>17</sup> Formalmente,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a}{x} + x \right) \rightarrow \infty$ .

<sup>18</sup> La  $y$  tenderà ad infinito anche quando la  $x$  “tende” ad un valore molto grande (“infinito”), dal momento che il rapporto tra un numero non nullo e un valore molto grande (nello specifico  $\frac{a}{x}$  quando  $x \rightarrow \infty$ ) dà come risultato un valore molto piccolo (appunto lo zero). Pertanto,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{x} + x \right) \rightarrow \infty$ , essendo  $\frac{a}{x} = 0$ .

Figura 9 – Minimizzazione di una funzione



Pertanto, può essere fatto un discorso analogo ma inverso a quello della funzione (1.7): a sinistra del punto di minimo (dove la derivata è pari a zero), la curva decresce ed ha pendenza negativa (derivata minore di zero). A destra del punto di minimo, la curva cresce ed ha pendenza positiva (derivata maggiore di zero). Ne consegue che il punto in cui la (1.7') assume il valore minimo è quello in cui la funzione ha smesso di decrescere ma non ha ancora iniziato a crescere, vale a dire il punto in cui la derivata è pari a zero<sup>19</sup>.

Non tutte le funzioni possono, ovviamente, essere massimizzate o minimizzate, ma occorre che siano rispettate determinate condizioni. Senza entrare nel dettaglio matematico, intuitivamente si può dire che una funzione per poter essere massimizzata o minimizzata deve contenere al suo interno almeno due forze che agiscono in direzioni opposte, come nel caso della (1.7) e della (1.7').

<sup>19</sup> Anche in questo caso si può usare un semplice foglio Excel per rappresentare graficamente la funzione (1.7'), assegnando alla  $x$  i valori da 0,5 a 10, con  $a = 4$ .



## 2. Il modello della domanda e dell'offerta di mercato di un bene

Nei modelli economici la descrizione del fenomeno oggetto di studio è, per definizione, semplificata (limitata alle variabili considerate più importanti) mentre la relazione tra due variabili non può che essere analizzata “a parità di condizioni” (*ipotesi ceteris paribus*), vale a dire considerando costanti le altre variabili.

Il *modello microeconomico della domanda e dell'offerta di mercato* è sicuramente il modello economico più conosciuto, uno dei più importanti e probabilmente il più semplice, basato su leggi economiche assolutamente intuitive e coerenti con i comportamenti che si osservano nella realtà. Inoltre, la conoscenza di tale modello è condizione indispensabile per una corretta e più facile comprensione del fondamentale modello macroeconomico della domanda e dell'offerta aggregata.

Dal punto di vista matematico, il modello si compone di tre equazioni: due equazioni comportamentali (che descrivono il comportamento dei due lati del mercato, quello dell'offerta e quello della domanda del bene considerato) e una condizione di equilibrio. Le principali ipotesi economiche del modello sono le seguenti: (i) il mercato del bene analizzato è molto “piccolo”, nel senso che ciò che accade in questo mercato non influenza gli esiti dei mercati di altri beni; (ii) gli agenti economici (consumatori e imprese) che operano nel mercato al fine di soddisfare attraverso lo scambio (l'acquisto o la vendita del bene) i propri bisogni o desideri sono tanti e nessuno di loro è in grado di influenzare singolarmente il prezzo del bene; (iii) il bene (o servizio) considerato è omogeneo. Il prezzo del bene, pertanto, è unico. Le due equazioni fondamentali del modello sono le cosiddette *funzioni di domanda e di offerta di mercato* di un generico bene o servizio:

$$Q_D = a + b \cdot P \quad (2.1)$$

$$Q_O = c + d \cdot P \quad (2.2)$$

dove  $Q_D$  è la *domanda di mercato*, vale a dire la quantità domandata del bene da parte di tutti i consumatori appartenenti al mercato analizzato; mentre  $Q_O$  è l'*offerta di mercato*, cioè la quantità offerta (prodotta e venduta) del bene da parte di tutte le imprese (i produttori e venditori del bene) appartenenti allo stesso mercato. È facile notare che le variabili di interesse del modello (le variabili endogene) sono due: il prezzo del bene  $P$  e la quantità scambiata  $Q$ , mentre  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  sono parametri e/o variabili esogene. Trattandosi di funzioni lineari, è immediato ottenere la pendenza della (2.1) e della (2.2). Precisamente, la relazione tra prezzo e quantità domandata è definita dal parametro  $b$ ; mentre, la relazione tra prezzo e quantità offerta è descritta dal parametro  $d$ . Il parametro  $b$  denota la variazione della quantità domandata al variare del prezzo,  $b = \frac{\Delta Q_D}{\Delta P}$ ; mentre, il parametro  $d$  esprime la variazione della quantità offerta al variare del prezzo,  $d = \frac{\Delta Q_O}{\Delta P}$ . Quale sarà il segno di  $b$  e  $d$ ? La famosa “*legge della domanda*” stabilisce, in modo del tutto intuitivo, che all’aumentare del prezzo del bene, la quantità domandata del bene (divenuto più costoso) si ridurrà. Una analoga ma inversa “*legge*” può essere ricavata per l’offerta, poiché all’aumentare del prezzo del bene, le imprese avranno convenienza ad aumentare l’offerta sul mercato. Pertanto, la pendenza della funzione di domanda sarà negativa ( $b < 0$ ) e la pendenza della funzione di offerta positiva ( $d > 0$ ). L’intensità della relazione dipenderà, ovviamente, dal valore assunto dai parametri  $b$  e  $d$  (maggiore è il loro valore, più forte sarà la variazione della quantità sia domandata che offerta al mutare del prezzo del bene). Per semplicità, è possibile riscrivere la funzione di domanda nel modo seguente, assegnando anche al parametro  $b$  un valore positivo ( $b > 0$ ):

$$Q_D = a - b \cdot P \quad (2.1')$$

La relazione tra quantità domandata e prezzo, la pendenza della (2.1'), resta comunque negativa.

La (2.1') e la (2.2), tuttavia, identificano un sistema di due equazioni in tre incognite ( $Q_D$ ,  $Q_O$  e  $P$ ) che non può essere risolto. *Condizione necessaria* per risolvere un modello economico è infatti l’uguaglianza

tra il numero di equazioni e il numero di incognite. Il senso comune, però, prima ancora della teoria economica, porta a ritenere impossibile avere, in un dato momento e in un dato mercato, due diverse quantità scambiate dello stesso bene ( $Q_D$  e  $Q_O$ ). Altrettanto intuitivamente, sarà il prezzo (unico) del bene, o meglio le sue variazioni, ad “impedire” tale irrealistica situazione. Il prezzo aumenterà sotto la spinta di una maggiore richiesta da parte dei consumatori del bene (quando  $Q_D > Q_O$ ); viceversa, si ridurrà sotto la spinta di una maggiore offerta delle imprese (quando  $Q_O > Q_D$ ). Il risultato del processo appena descritto non può che condurre ad una situazione di equilibrio. L'**equilibrio** può essere definito come quella situazione in cui le forze contrapposte che interagiscono nel mercato (nello specifico la domanda e l'offerta) “*si compensano l'una con l'altra impedendo in tal modo qualsiasi tendenza a ulteriori cambiamenti*” (Chiang, 2002, p. 247). L'equilibrio si ottiene nel mercato quando la quantità domandata è pari alla quantità offerta ( $Q_O = Q_D$ ). In questo caso, infatti, non vi sarà alcuna tendenza al cambiamento, nel senso che a nessuna delle due forze contrapposte converrà modificare tale situazione (variare la quantità domandata o offerta), dal momento che la quantità del bene scambiata nel mercato coincide esattamente con quella desiderata sia dai consumatori che dalle imprese. Il prezzo, pertanto, non cambierà ulteriormente. La *condizione di equilibrio* (a cui si è in precedenza accennato come ad uno dei tre tipi di equazioni utilizzate in ambito economico) è la seguente:

$$Q_D = Q_O = Q \quad (2.3)$$

Ora il modello è caratterizzato da un sistema di tre equazioni (due comportamentali e una condizione di equilibrio) e tre incognite. In realtà, la condizione di equilibrio riduce il sistema a due equazioni in due incognite, potendo assumere – in equilibrio – un valore unico per la quantità domandata e offerta:

$$Q = a - b \cdot P \quad (2.1'')$$

$$Q = c + d \cdot P \quad (2.2')$$

Tuttavia, la condizione che prevede l'uguaglianza tra il numero di equazioni e il numero di incognite è *necessaria ma non sufficiente*, nel senso che occorre rispettarla ma non basta ad assicurare che l'equilibrio esista. Per dimostrarlo, basta risolvere il modello, cioè eguagliare la (2.1'') e la (2.2'):

$$a - b \cdot P = c + d \cdot P$$

da cui è possibile ricavare, attraverso alcuni semplici passaggi algebrici di seguito descritti, l'incognita prezzo:

$$a - c = d \cdot P + b \cdot P$$

$$a - c = (d + b) \cdot P$$

$$P = \frac{(a-c)}{(d+b)} > 0 \quad (2.4)$$

Il denominatore della (2.4) è positivo  $(d + b) > 0$ , poiché  $b$  e  $d$  sono entrambi parametri positivi. Dal momento che il prezzo di un bene deve essere positivo,  $P > 0$  (se un bene non ha valore non è un "bene economico", nel senso che non ci sarà interesse ad acquistarlo o venderlo dal momento che non possiede il requisito della "scarsità"), l'ulteriore condizione matematica che assicura tale risultato è che anche il numeratore della (2.4) sia positivo, cioè  $(a - c) > 0$ <sup>1</sup>. In realtà, dal punto di vista economico, il parametro  $c$  dovrebbe essere non positivo, dal momento che la quantità offerta sarà positiva ( $Q_o > 0$ ) solo se il prezzo è superiore ad un certo livello minimo, sotto il quale le imprese non avranno convenienza a produrre e vendere il bene (perché, ad esempio, non riescono nemmeno a coprire i costi di produzione). Formalmente, il livello minimo del prezzo è ricavato dalla (2.2) sotto la condizione che l'offerta del bene sia nulla ( $Q_o = 0$ ):

$$P_{min} = -\frac{c}{d} \quad (2.5)$$

essendo un prezzo,  $P_{min}$  deve essere comunque non negativo; precisamente,  $P_{min} \geq 0$  se  $c \leq 0$  (essendo  $d > 0$ ). Per prezzi uguali o inferiori, le imprese non hanno convenienza a produrre (infatti  $Q_o \leq 0$ ). Affinché  $P > P_{min}$  e quindi  $Q_o > 0$ , occorre che

$$\underbrace{\frac{(a-c)}{(d+b)}}_P > \underbrace{-\frac{c}{d}}_{P_{min}}$$

ricavando la condizione:

$$a > -\frac{c}{d} \cdot (d + b) + c$$

---

<sup>1</sup> Il prezzo sarebbe stato ugualmente positivo se avessimo risolto l'equazione ottenendo  $P = \frac{(c-a)}{(-b-d)} > 0$ . Infatti, se  $a > c$ , allora  $(c - a) < 0$ , con  $(-b - d) < 0$ .