

# Capitolo 1

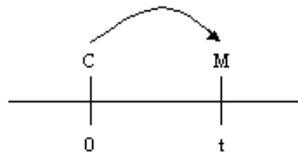
## Calcolo finanziario

### 1.1. Capitalizzazione e attualizzazione

Il calcolo finanziario si occupa dello scambio tra somme di denaro disponibili ad epoche diverse, e prende in esame due tipi di operazioni:

- operazioni di capitalizzazione
- operazioni di attualizzazione

Un'operazione di capitalizzazione può essere considerata come un trasferimento di fondi in avanti nel tempo, e in questo caso si ha:



con:

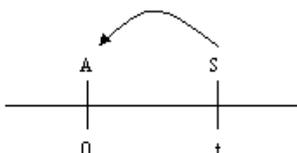
$C$  = capitale investito (somma impiegata)

$M$  = montante (somma riscossa)

$\frac{M}{C} = f$  = fattore di capitalizzazione (o di montante)

$M - C = I$  = interesse

Un'operazione di attualizzazione, invece, può essere considerata come un trasferimento di fondi all'indietro nel tempo, e in questo caso si ha:



con:

$S$  = valore nominale (somma futura)

$A$  = valore attuale (somma immediata)

$\frac{A}{S} = \phi$  = fattore di attualizzazione o di sconto

$S - A = D$  = sconto

Di conseguenza, in un'operazione di capitalizzazione la relazione fondamentale tra capitale investito e montante è:

$$M = C \cdot f$$

e tenendo conto della definizione di interesse si ha anche:

$$I = M - C = C \cdot f - C = C \cdot (f - 1)$$

In un'operazione di attualizzazione, invece, la relazione fondamentale tra valore attuale e valore nominale è:

$$A = S \cdot \phi$$

e tenendo conto della definizione di sconto si ha anche:

$$D = S - A = S - S \cdot \phi = S \cdot (1 - \phi)$$

## 1.2. Regimi finanziari e leggi finanziarie

I fattori di scambio  $f$  e  $\phi$  sopra introdotti vengono detti fattori finanziari. In genere, essi sono funzione del tempo  $t$  e di un parametro  $\alpha$  o  $\beta$  (che prende il nome di tasso di interesse o tasso di sconto), per cui possono essere indicati con  $f(t, \alpha)$  e  $\phi(t, \beta)$ . Queste funzioni individuano i cosiddetti regimi finanziari (rispettivamente di capitalizzazione e di attualizzazione), mentre fissando il valore del parametro  $\alpha$  o  $\beta$  si ottengono funzioni che dipendono solo dal tempo,  $f(t)$  e  $\phi(t)$ , le quali individuano le cosiddette leggi finanziarie (rispettivamente di capitalizzazione e di attualizzazione).

Due fattori finanziari  $f$  e  $\phi$  si dicono coniugati quando vale la relazione:

$$f \cdot \phi = 1$$

dalla quale si ottiene anche:

$$f = \frac{1}{\phi} \quad \phi = \frac{1}{f}$$

Si definisce poi tasso di interesse l'interesse prodotto da una somma unitaria (ad esempio 1 €) investita per un intervallo di tempo (il primo, quello che va da  $t = 0$  a  $t = 1$ ) di durata unitaria (ad esempio 1 anno):

$$i = 1 \cdot f(1) - 1 = \text{tasso di interesse}$$

mentre si definisce tasso di sconto il compenso trattenuto da chi anticipa una somma unitaria (ad esempio 1 €) che scade dopo un intervallo di tempo (il primo, quello che va da  $t = 0$  a  $t = 1$ ) di durata unitaria (ad esempio 1 anno):

$$d = 1 - 1 \cdot \phi(1) = \text{tasso di sconto}$$

Da queste definizioni si ricava:

$$f(1) = 1 + i \quad \phi(1) = 1 - d$$

e nel caso di fattori finanziari coniugati si ha la relazione:

$$f(1) \cdot \phi(1) = 1$$

che può essere scritta nella forma:

$$(1 + i) \cdot (1 - d) = 1$$

dalla quale si ottiene:

$$d = \frac{i}{1 + i} \quad i = \frac{d}{1 - d}$$

che sono le relazioni che legano tasso di interesse  $i$  e tasso di sconto  $d$  (relativi a fattori finanziari coniugati).

I fattori finanziari  $f$  e  $\phi$  possono essere calcolati in base ad opportune convenzioni, dando origine a diversi regimi finanziari. In particolare, i regimi finanziari usuali sono 3:

- regime della capitalizzazione semplice (o dello sconto razionale)
- regime della capitalizzazione composta (o dello sconto composto)
- regime della capitalizzazione a interessi semplici anticipati (o dello sconto commerciale)

### 1.2.1. Capitalizzazione semplice

Il regime della capitalizzazione semplice è caratterizzato dal fatto che gli interessi sono proporzionali al capitale investito  $C$  e alla durata  $t$  dell'operazione, cioè si ha:

$$\frac{I}{Ct} = \alpha \Rightarrow I = Ct\alpha$$

dove  $\alpha$  è una costante di proporzionalità (positiva). Ponendo  $C = 1$  e  $t = 1$  si ottiene:

$$I = \alpha$$

e quindi  $\alpha$  rappresenta l'interesse prodotto da una somma unitaria investita per un intervallo di tempo di durata unitaria, cioè rappresenta il tasso di interesse (semplice)  $i$ . Si ha allora:

$$I = Cti$$

e poi anche:

$$M = C + I = C + Cti = C(1 + it)$$

da cui:

$$f(t, i) = 1 + it \quad \phi(t, i) = \frac{1}{1 + it}$$

dove  $f(t, i)$  è il fattore di capitalizzazione che individua il regime della capitalizzazione semplice mentre  $\phi(t, i)$  è il fattore di attualizzazione coniugato di  $f(t, i)$  ed individua il regime dello sconto razionale (o sconto semplice). Il tasso  $i$  rappresenta il tasso di interesse semplice, ed assegnando ad esso un particolare valore si individuano la legge di interesse semplice  $f(t)$  e la legge di sconto razionale  $\phi(t)$  a quel determinato tasso di interesse.